# Des grumeaux dans la topologie : une introduction à la notion d'ensemble simple

Nicolas Passat[1], Michel Couprie[2], Gilles Bertrand[2], Loïc Mazo[1]

[1]LSIIT, UMR 7005 CNRS/ULP - Strasbourg
[2]IGM-A2SI, UMR 7049 CNRS/UMLV - Paris

GT Géométrie Discrète - St-Dié-des-Vosges - 09/11/2007

# Réduire des objets discrets...

Réduction d'objets discrets (*i.e.* digitaux) pour :

- modifier ;
- corriger ;
- analyser ;
- segmenter ;

des images (2D, 3D,... $n$D) binaires, ou à niveaux de gris, avec une contrainte importante :

Ne pas altérer la topologie.

# ... par des méthodes adéquates ...

Dans ce contexte, plusieurs familles de méthodes, avec des objectifs variables :

- méthodes de réduction ;
- méthodes de squelettisation ;
- méthodes de réduction ultime.

**Remarque**

*Dans $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}^3$, ces méthodes s'appuient (presque) toujours sur la notion de point simple.*

# . . . par des méthodes adéquates . . .

Forme « générale » d'un algorithme de réduction.

Entrée : $X \subset \mathbb{Z}^n$
Sortie : $S \subseteq X$ (objet réduit, topologiquement équivalent)
Algorithme :
Soit $S = X$
**while** $\exists x \in S, simple(x, S)$ **do**
  Choisir $x \in S, simple(x, S)$
  $S = S \setminus \{x\}$
**end while**

# . . . utilisant des fondements théoriques adéquats . . .

L'utilisation quasi exclusive de la notion de point simple se justifie implicitement par le postulat suivant.

**Postulat**

*Soit $X \subset \mathbb{Z}^n$ $(n \geq 1)$ un objet discret. Si $X$ ne contient pas de point simple, alors il n'existe pas d'objet $Y \subset X$ topologiquement équivalent à $X$ (i.e. le retrait de tous les points simples d'un objet permet d'aboutir à un objet « minimal » topologiquement équivalent).*

Justification des approches visant à retrancher de manière itérative (ou parallèle) des points simples jusqu'à stabilité ou satisfaction d'un critère donné.

# . . . ou presque.

Malheureusement, ce postulat est faux.

**Théorème**

*Il existe des objets* $X, Y \subset \mathbb{Z}^n$ $(n \geq 1)$ *tels que :*

- $X$ *ne contient aucun point simple ;*
- $Y \subset X$ *est topologiquement équivalent à* $X$ *;*

*(i.e. le retrait de tous les points simples d'un objet ne permet pas nécessairement d'aboutir à un objet « minimal » topologiquement équivalent).*

# Grumeaux

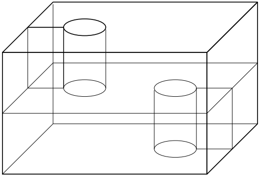
On en dérive une première définition (pas tout à fait formelle. . . ) de la notion de grumeau.

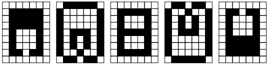
**Definition (Grumeau)**

Soit $Y \subset X \subset \mathbb{Z}^n$ ($n \geq 1$). Si $X$ et $Y$ sont topologiquement équivalents, et $X$ ne contient pas de point simple, on dit que $X$ est un *grumeau (eng. « a lump ») relativement à* $Y$, ou simplement que $X$ est un *grumeau*.

# Des exemples de grumeaux dans $\mathbb{Z}^3$

Un exemple « classique » (qui n'est en fait pas un grumeau) : la maison de Bing (Bing, 1964).





$X_B \subset \mathbb{Z}^3$, en $(26, 6)$-adjacence

$|X_B| = 135$

$b_0(X_B) = 1$

$b_1(X_B) = 0$

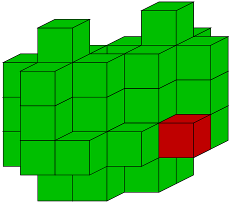
$b_2(X_B) = 0$

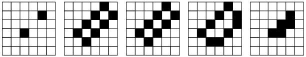
$|K(X_B)| = 1$

$\forall x \in X_B, |C_6^x[N_{18}^*(x) \cap \overline{X_B}]| > 1$

# Des exemples de grumeaux dans $\mathbb{Z}^3$

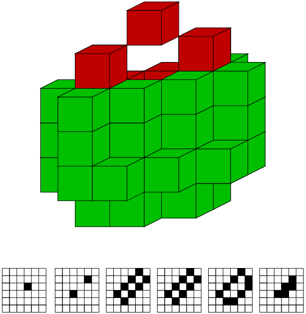
Des exemples moins classiques (Passat *et al.*, ISMM'07).





$X_1 \subset \mathbb{Z}^3$, en $(26, 6)$-adjacence
$|X_1| = 32$
$b_0(X_1) = 1$
$b_1(X_1) = 0$
$b_2(X_1) = 0$
$|K(X1)| = 1$
$\forall x \in X_1, |C_6^x[N_{18}^*(x) \cap \overline{X_1}]| > 1$

# Des exemples de grumeaux dans $\mathbb{Z}^3$



$X_2 \subset \mathbb{Z}^3$, en $(26,6)$-adjacence

$|X_2| = 33$

$b_0(X_2) = 1$

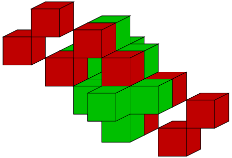
$b_1(X_2) = 1$

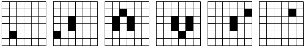
$b_2(X_2) = 0$

$|K(X_2)| = 5$

$\forall x \in X_2, |C_6^x[N_{18}^*(x) \cap \overline{X_2}]| > 1 \vee |C_{26}^x[N_{26}^*(x) \cap X_2]| > 1$

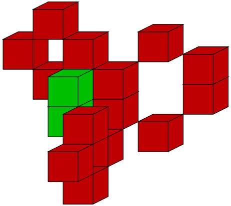
# Des exemples de grumeaux dans $\mathbb{Z}^3$

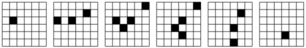




$X_3 \subset \mathbb{Z}^3$, en $(26, 6)$-adjacence
$|X_3| = 18$
$b_0(X_3) = 1$
$b_1(X_3) = 2$
$b_2(X_3) = 0$
$|K(X_3)| = 9$
$\forall x \in X_3, |C_6^x[N_{18}^*(x) \cap \overline{X_3}]| > 1 \vee |C_{26}^x[N_{26}^*(x) \cap X_3]| > 1$

# Des exemples de grumeaux dans $\mathbb{Z}^3$





$X_4 \subset \mathbb{Z}^3$, en $(26,6)$-adjacence
$|X_4| = 16$
$b_0(X_4) = 1$
$b_1(X_4) = 3$
$b_2(X_4) = 0$
$|K(X_4)| = 14$
$\forall x \in X_4, |C_6^x[N_{18}^*(x) \cap \overline{X_4}]| > 1 \vee |C_{26}^x[N_{26}^*(x) \cap X_4]| > 1$

# Conséquences

L'existence de grumeaux implique que, pour des méthodes basées sur la notion de points simples :

- une réduction ultime ne garantit pas l'obtention d'un résultat minimal ;
- une squelettisation peut ne pas fournir un objet qui soit un squelette ;
- des « artefacts topologiques » sont susceptibles d'apparaître dans le résultat de réductions.

# Différents « types » de grumeaux

Dans les faits, il existe deux sortes de grumeaux :

- ceux qui ne peuvent être réduits *que* par une transformation *non monotone* (maison de Bing) ;
- ceux qui *peuvent* être réduits par une transformation *monotone* (autres exemples présentés).

Les grumeaux de la seconde sorte peuvent alors être réduits par retrait de points *non simples*, mais qui - retranchés de manière simultanée - forment un « ensemble simple » (*i.e.* dont le retrait n'affecte pas la topologie).

# Ensembles simples

## Definition (Ensemble simple - définition informelle et incomplète)

Soit $X \subset \mathbb{Z}^n$ ($n \geq 1$). Soit $Y \subset X$ ($Y \neq \emptyset$). Si $X$ et $X \setminus Y$ sont « topologiquement équivalents », alors $Y$ est un *ensemble simple pour* $X$. Par ailleurs, si $Y$ ne contient pas strictement d'ensemble simple pour $X$, on dit que $Y$ est un *ensemble simple minimal pour* $X$.

## Remarque

1. *Si $x$ est un point simple pour $X \subset \mathbb{Z}^n$, alors $\{x\}$ est un ensemble simple (minimal) pour $X$.*
2. *Si $Y$ est un ensemble simple minimal (non simgleton) pour $X \subset \mathbb{Z}^n$, alors $Y$ ne contient aucun point simple pour $X$.*

# Objectifs

1. Détecter à partir de quelle dimension des grumeaux apparaissent.
2. Proposer des caractérisation des ensembles simples (minimaux).
3. Proposer des algorithmes de réduction « corrects » à partir de ces caractérisations.

**Remarque**

*On ne s'intéresse - pour le moment - qu'aux grumeaux réductibles par une transformation continue monotone (et donc aux « ensembles simples qui leur sont liés »)...*

# Pourquoi travailler dans l'espace des complexes cubiques ?

## Remarque

*L'utilisation de l'espace des complexes cubiques permet :*

- *de modéliser $\mathbb{Z}^n$ (au moins en adjacence faible) dans un cadre « propre », i.e. où les propriétés topologiques des objets discrets sont clairement formalisées, et le lien entre transformations continues et discrètes est plus évident ;*
- *de disposer d'un cadre plus riche que $\mathbb{Z}^n$ (pourquoi s'en priver !).*

# Faces

Soit $\mathbb{F}_0^1$ et $\mathbb{F}_1^1$ les deux ensembles respectivement définis par

$$\mathbb{F}_0^1 = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\},$$

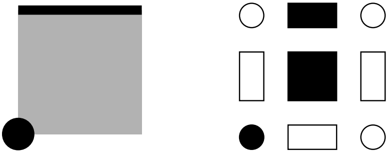
$$\mathbb{F}_1^1 = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

## Definition (Face)

Une *face* $f$ de $\mathbb{Z}^n$, ou une *m-face* $(0 \leq m \leq n)$ de $\mathbb{Z}^n$, est le produit cartésien d'exactement $m$ éléments de $\mathbb{F}_1^1$ et $n - m$ éléments de $\mathbb{F}_0^1$ : $f = \prod_{i=1}^n f_i$, (avec $f_i \in \mathbb{F}_1^1 \cup \mathbb{F}_0^1$). La *dimension* de $f$ est $m$, et est notée $dim(f) = m$. On note $\mathbb{F}_m^n$ l'ensemble des $m$-faces de $\mathbb{Z}^n$ $(0 \leq m \leq n)$, et $\mathbb{F}^n$ l'ensemble de toutes les faces de $\mathbb{Z}^n$ : $\mathbb{F}^n = \bigcup_{m=0}^n \mathbb{F}_m^n$.

# Faces



# Fermeture

**Definition (Fermeture d'une face)**

Soit $f \in \mathbb{F}^n$ une face. La *fermeture* de $f$ est définie par :

$$\hat{f} = \{g \in \mathbb{F}^n \mid g \subseteq f\},$$

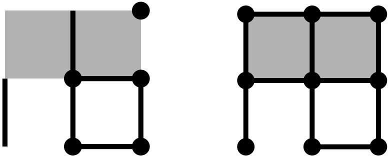
et on note : $\hat{f}^* = \hat{f} \setminus \{f\}$. Toute face $g \in \hat{f}$ est une *face de* $f$ et toute face $g \in \hat{f}^*$ est une *face propre de* $f$.

**Definition (Fermeture d'un ensemble de faces)**

Soit $F \subseteq \mathbb{F}^n$ un ensemble de faces. La *fermeture* de $F$ est définie par :

$$F^- = \bigcup \{\hat{f} \mid f \in F\}.$$

# Fermeture



# Cellules

## Definition (Cellule)

Soit $F \subseteq \mathbb{F}^n$ un ensemble de faces. On dit que $F$ est une *cellule* (ou une $m$-cellule) s'il existe une $m$-face $f \in F$ telle que $F = \hat{f}$.

## Remarque

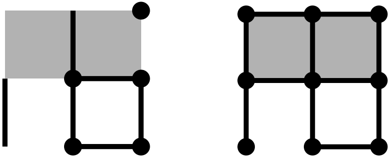
*Par définition, toute face $f$ induit une cellule $\hat{f}$ correspondant à sa fermeture (de même que toute cellule est induite par une face). On définira - et notera - donc généralement une cellule comme la fermeture de la face qui la génère.*

# Complexes

**Definition (Complexe)**

Soit $F \subseteq \mathbb{F}^n$ un ensemble de faces. On dit que $F$ est un *complexe* (dans $\mathbb{F}^n$) si $F = F^-$, c'est-à-dire si pour toute face $f \in F$, on a $\hat{f} \subseteq F$. Tout sous-ensemble $G \subseteq F$ tel que $G$ est un complexe est appelé *sous-complexe* de $F$, et on note $G \preceq F$. Si $F$ est un complexe dans $\mathbb{F}^n$, on note $F \preceq \mathbb{F}^n$.

## Complexes

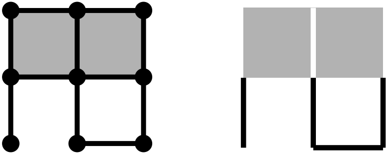


# Facettes

## Definition (Facette)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $f \in F$ une face de $F$. On dit que $f$ est une *facette* (ou une *face principale*) de $F$ si $\forall g \in F, f \notin \hat{g}^*$. On note $F^+$ l'ensemble de toutes les facettes de $F$.

# Facettes



# Dimension, pureté

## Definition (Dimension)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. La *dimension* d'un complexe (non vide) $F$, est définie par :

$$dim(F) = \max\{dim(f) \mid f \in F^+\}.$$

On dit que $F$ est un $m$-complexe si $dim(F) = m$.

## Definition (Complexe pur)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. On dit que $F$ est un *complexe pur* si :

$$\forall f \in F^+, dim(f) = dim(F).$$

## Sous-complexes principaux

### Definition (Sous-complexe principal)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Let $G \preceq F$ un sous-complexe de $F$. Si $G^+ \subseteq F^+$, on dit que $G$ est un *sous-complexe principal de* $F$, et on note $G \sqsubseteq F$.

# Notions topologiques de base

Comme dans $\mathbb{Z}^n$, on dispose des notions :

- d'adjacence (unique...) ;
- de chemin ;
- de composante connexes, tunnels, cavités...

Et bien évidemment de tous les invariants topologiques classiques (Euler, Betti...)

# Paires libres

## Definition (Face libre, face de bord, paire libre)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $f \in F^+$ une face principale de $F$. La face $f$ est une *face de bord de* $F$ s'il existe une face $g \in \hat{f}^*$ telle $f$ est la seule face incluant $g$ :

$$\exists g \in \hat{f}^*, \forall h \in F, g \in \hat{h}^* \Rightarrow h = f.$$

Une telle face $g$ est dite *libre dans* $F$, et la paire de faces $(f, g)$ est appelée *paire libre de* $F$. On dit que $f \in F^+$ est une *face intérieure de* $F$ si $f$ n'est pas une face de bord de $F$.

# Collapsus

## Definition (Collapsus)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $f, g \in F$ des faces de $F$ telles que $(f, g)$ est une paire libre de $F$. Le complexe $F \setminus \{f, g\}$ est appelé un *collapsus élémentaire de* $F$, ou plus simplement *collapsus de* $F$, et on note alors $F \searrow^e G$. Si $dim(f) = k$, on dira parfois que $F \setminus \{f, g\}$ est un *k-collapsus élémentaire de* $F$.

## Remarque

*Par abus de langage, on appelle également collapsus l'opération transformant* $F$ *en* $F \setminus \{f, g\}$.

# Séquence de collapsus

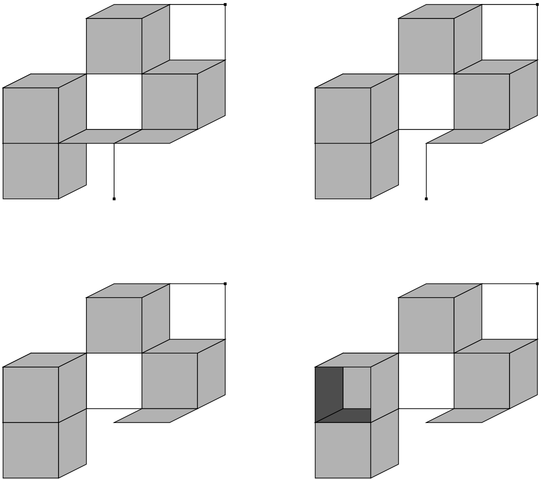
## Definition (Séquence de collapsus)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $S = \langle (f_i, g_i) \rangle_{i=1}^{t}$ $(t \geq 1)$ une suite de paires de faces de $F$. On dit que $S$ est une *séquence de collapsus de $F$* si, pour $i = 0$ à $t - 1$, la paire $(f_{i+1}, g_{i+1})$ est une paire libre de $F_i$, avec $F_0 = F$ et $F_i = F_{i-1} \setminus \{f_i, g_i\}$ pour tout $i \in [1, t]$. On dit que $F$ *collapse sur* $G = F_t$ (ou que $G$ est *une rétraction de $F$*) et on note $F \searrow G$.

## Remarque

*Toujours par abus de langage, on appelle également séquence de collapsus la suite de complexes* $(F_i)_{i=0}^{t}$.

# Séquence de collapsus



# Détachement, attachement

## Definition (Détachement)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe (principal) de $F$. Le *détachement de $G$ par rapport $F$* est le complexe défini par :

$$F \oslash G = (F^+ \setminus G^+)^-.$$

## Definition (Attachement)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe (principal) de $F$. L'*attachement de $G$ à $F$* est le complexe défini par :

$$Att(G, F) = G \cap (F \oslash G).$$

# Retour sur les grumeaux et ensembles simples

## Definition (Cellule simple)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G = \hat{f} \sqsubseteq F$ une cellule (principale) de $F$. On dit que *la cellule $G$ est simple pour $F$* (ou que *$G$ est une cellule simple de $F$*) si :

$$F \searrow F \oslash G,$$

ou de manière équivalente :

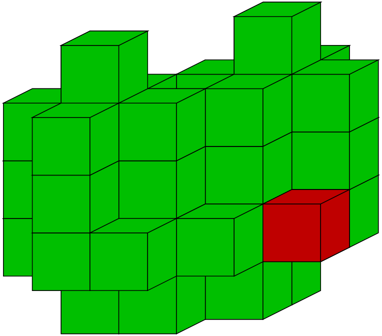
$$G \searrow Att(G, F).$$

# Retour sur les grumeaux et ensembles simples

**Definition (Grumeau)**

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal (strict) de $F$ ($G \subset F$). Si $F \searrow G$ et que $F$ n'admet aucune cellule simple, on dit que $F$ *est un grumeau relativement à* $G$, ou plus simplement, que $F$ *est un grumeau*.

# Retour sur les grumeaux et ensembles simples



# Retour sur les grumeaux et ensembles simples

## Definition (Ensemble simple)

Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal de $F$. On dit que le *complexe* $G$ *est simple pour* $F$ (ou que $G$ *est un ensemble simple pour* $F$) si :

$$F \searrow F \oslash G,$$

ou de manière équivalente :

$$G \searrow Att(G, F).$$

Si $G$ n'inclut pas strictement d'ensemble simple pour $F$, on dit que $G$ *est un ensemble simple minimal pour* $F$.

# Retour sur les grumeaux et ensembles simples

## Remarque

1. *Si* $G \sqsubseteq F$ *est une cellule simple pour* $F \preceq \mathbb{F}^n$, *alors* $G$ *est un ensemble simple (minimal) pour* $F$.
2. *Si* $G \sqsubseteq F$ *est un ensemble simple minimal (non singulier) pour* $F \preceq \mathbb{F}^n$, *alors* $G$ *n'inclut pas strictement de cellule simple pour* $F$.

# ESM : dimensions 0 et 1 (Passat et al., RR2-2008)

**Théorème (Non-existence des ESM de dimension 0)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$. Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal de $F$. Si $G$ est un ESM pour $F$, alors $dim(G) > 0$.*

**Théorème (Singularité des ESM de dimension 1)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$. Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal de $F$. Si $G$ est un ESM pour $F$ et $dim(G) = 1$, alors $|G^+| = 1$, i.e. $G$ est une 1-cellule simple pour $F$.*

# ESM : dimension 2 (Passat et al., RR2-2008)

**Théorème (Singularité des ESM de dimension 2 dans $\mathbb{F}^2$)**

*Soit $F \preceq \mathbb{F}^2$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal de $F$. Si $G$ est un ESM pour $F$ et dim$(G) = 2$, alors $|G^+| = 1$, i.e. $G$ est une 2-cellule simple pour $F$.*

**Théorème (Possible non-singularité des ESM de dimension 2)**

*Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 3$). Soit $F \preceq \mathbb{F}^n$ un complexe. Soit $G \sqsubseteq F$ un sous-complexe principal de $F$. Si $G$ est un ESM pour $F$ et dim$(G) = 2$, alors on n'a pas nécessairement $|G^+| = 1$, i.e. $G$ n'est pas nécessairement une 2-cellule.*

# ESM : dimension 2 (Mazo et al., RR3-2008)

**Théorème (Caractérisation des ESM de dim. 2 dans $\mathbb{F}^n$ ($n \geq 3$))**

*En cours de validation.*
*Cf. soutenance de M2R de Loïc Mazo (06/2008, Strasbourg).*

**Corollaire (Dimension d'« apparition » des grumeaux dans $\mathbb{F}^n$)**

*Des grumeaux de dimension $k \geq 2$ sont susceptibles d'apparaître dans $\mathbb{F}^n$ pour $n \geq 3$.*

# ESM : dimension 3 (Passat et al., RR1-2007)

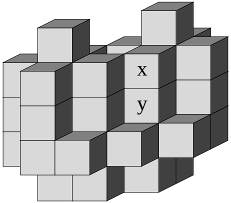
**Théorème (Caract. des ESM de dim. 3 et de card. 2 dans $\mathbb{F}^3$)**

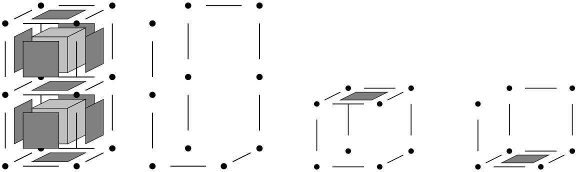
*Soit $F \sqsubseteq \mathbb{F}^3$ un complexe pur. Soit $G \sqsubseteq F$ tel que $|G^+| = 2$. Alors $G$ est un ensemble simple minimal pour $F$ si et seulement si :*
(1) *l'intersection des deux facettes de $G$ est une 2-face,*
(2) $\forall g \in G^+, |C[Att(\hat{g}, F)]| = 1$,
(3) $\forall g \in G^+, \chi(Att(\hat{g}, F)) \leq 0$,
(4) $|C[Att(G, F)]| = 1$,
(5) $\chi(Att(G, F)) = 1$.

**Corollaire (Dimension d'« apparition » des grumeaux dans $\mathbb{Z}^n$)**

*Des grumeaux (purs) de dimension $k = 3$ sont susceptibles d'apparaître dans $\mathbb{F}^3$. En conséquence, des grumeaux sont susceptibles d'apparaître dans $\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 3$.*

# ESM : dimension 3



# Récapitulatif des travaux réalisés

| | dimension ESM | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | $k$ |
| $\mathbb{F}^1$ | $\bullet$ | $\textcolor{green}{\bullet}$ | $\circ$ | $\circ$ | $\circ$ |
| $\mathbb{F}^2$ | $\bullet$ | $\textcolor{green}{\bullet}$ | $\textcolor{green}{\bullet}$ | $\circ$ | $\circ$ |
| $\mathbb{F}^3$ | $\bullet$ | $\textcolor{green}{\bullet}$ | $\textcolor{yellow}{\bullet}$ | $\textcolor{orange}{\bullet}$ | $\circ$ |
| $\mathbb{F}^n$ | $\bullet$ | $\textcolor{green}{\bullet}$ | $\textcolor{yellow}{\bullet}$ | $\textcolor{red}{\bullet}$ | $\textcolor{red}{\bullet}$ |

- $\circ$ : sans objet ;
- $\bullet$ : non-existence [RR2-2008] ;
- $\textcolor{green}{\bullet}$ : singularité [RR2-2008] $\longrightarrow$ caractérisation « triviale » ;
- $\textcolor{yellow}{\bullet}$ : caractérisation (en cours de vérification) [RR3-2008] ;
- $\textcolor{orange}{\bullet}$ : caractérisation partielle (« paires simples ») [RR1-2007] ;
- $\textcolor{red}{\bullet}$ : des propriétés, mais pas encore de caractérisation. . .

# Perspectives

Travaux à (plus ou moins) court terme :

- Finalisation de la caractérisation des ESM de dimension 2.
- Reprise de la caractérisation des ESM de dimension 3.
- Développement d'algorithmes de réduction efficaces.

Travaux à moyen et long terme :

- Les ESM de dimension $n$.
- Les ESM au sens des transformations non monotones.
- Relations entre $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{F}^n$ dans le cadre des ESM.
- etc. . .

# « Publications »

[ISMM-2007] N. Passat, M. Couprie, G. Bertrand.
Topological monsters in $\mathbb{Z}^3$ : A non-exhaustive bestiary.
*ISMM'07*, vol. 2, pp. 11–12, 2007.

[RR1-2007] N. Passat, M. Couprie, G. Bertrand.
Minimal simple pairs in the cubic grid.
Rapport de recherche IGM2007-4 (soumis à *DGCI'08*).

[RR2-2008] N. Passat, M. Couprie, G. Bertrand, L. Mazo
0-D, 1-D and 2-D minimal simple sets in cubical complexes : some results in *n*-D spaces.
Rapport de recherche (à paraître).

[RR3-2008] L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, G. Bertrand.
Ensembles simples minimaux dans les grilles cubiques *n*-D : étude des ensembles de dimension 2.
Rapport de recherche (à paraître).

# Merci de votre attention.

Contacts

- Nicolas Passat : passat@dpt-info.u-strasbg.fr
  https ://dpt-info.u-strasbg.fr/˜passat
- Michel Couprie : m.couprie@esiee.fr
  http ://www.esiee.fr/˜coupriem
- Gilles Bertrand : g.bertrand@esiee.fr
- Loïc Mazo : loic.mazo@ulp.u-strasbg.fr

# Et maintenant, une page de publicité. . .

Des exemplaires des actes d'ISMM'07 (International Symposium on Mathematical Morphology 2007) sont encore disponibles.

Il est possible d'en obtenir **gratuitement** un exemplaire pour la bibliothèque de votre université ou votre centre de recherche !

Pour recevoir un exemplaire, envoyez un e-mail à Gérald Banon (banon@dpi.inpe.br) indiquant l'adresse de la bibliothèque concernée.