



HAL
open science

Reims Image 2014 - Tome 4 - GeoDis

Nicolas Passat, Laurent Lucas

► **To cite this version:**

| Nicolas Passat, Laurent Lucas (Dir.). Reims Image 2014 - Tome 4 - GeoDis. 2014. hal-01695219

HAL Id: hal-01695219

<https://hal.univ-reims.fr/hal-01695219>

Submitted on 29 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Tome 4 - GEODIS

Reims Image 2014

Association Française d'Informatique Graphique (AFIG) / COmpression et REprésentation des Signaux Audiovisuels (CORESA) / Association Française de Réalité Virtuelle (AFRV) / Géométrie Discrète (GeoDis)

Reims, 25 novembre : journée des jeunes chercheurs IUT de Reims
26 à 28 novembre : centre des congrès de Reims

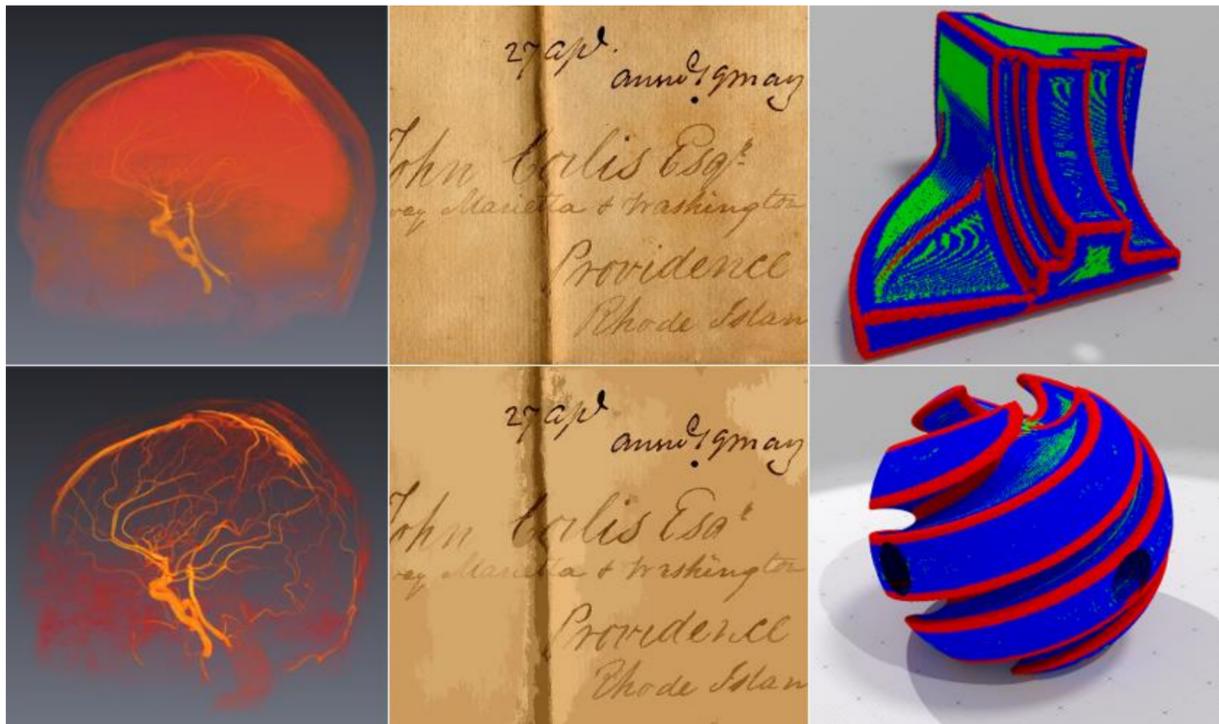
1^{res} Journées plénières du GdR Informatique Géométrique et Graphique, Réalité Virtuelle et Visualisation
Reimsimage2014.univ-reims.fr

REIMS
IMAGE
2 0 1 4


UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

NEUVIÈME JOURNÉE DU GROUPE DE TRAVAIL EN GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

26 NOVEMBRE 2014
CENTRE DES CONGRÈS, REIMS



Organisée par :



En partenariat avec



et le soutien de



Préface

Après Clermont-Ferrand et Saint-Dié-des-Vosges en 2007, Chambéry en 2008, Montpellier en 2009, Strasbourg en 2010, Clermont-Ferrand en 2011, Nantes en 2012 et Paris en 2013, c'est Reims qui accueille en novembre 2014 la neuvième réunion du Groupe de Travail en Géométrie Discrète (<http://gt-geodis.gdr-im.fr> et http://icube-web.unistra.fr/gdr-igrv/index.php/GT_Géométrie_Discrète), organisée par le Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (CReSTIC) et la Maison de la Simulation (MaSCA) de l'Université de Reims Champagne-Ardenne.

Cette édition 2014 a pour objectif de favoriser les interactions entre les membres de la communauté « Géométrie Discrète », mais également de promouvoir ses activités auprès des communautés thématiquement proches, également participantes au congrès Reims Image 2014. Dans cette optique, les présentations orales s'accompagnent cette année d'une session « posters ». Par ailleurs, une place significative est consacrée aux aspects méthodologiques et applicatifs, qui viennent enrichir des contributions plus fondamentales.

Plus de 40 participants, issus d'une quinzaine de laboratoires participent à cette édition. Ces effectifs en hausse sont à mettre au crédit d'un programme dense et attractif, grâce à la mutualisation avec les journées AFIG, AFRV et CORESA au sein de Reims Image 2014. Ils sont aussi le résultat du soutien financier de l'ANR, via le projet KIDICO, qui a facilité la venue de nombreux participants.

Au programme de cette neuvième édition, 9 présentations orales et 5 posters sont proposés. Dix de ces présentations sont le fruit de travaux de doctorat, et illustrent le dynamisme de la communauté « Géométrie Discrète ». Deux présentations invitées viennent compléter ce programme, par la présentation de travaux connexes aux domaines du Groupe de Travail. La première, commune aux 4 événements de Reims Image 2014, est proposée par Mathieu Desbrun (CalTech) et porte sur des thématiques de *Geometry Processing*. La seconde, proposée par Pascal Schreck (Université de Strasbourg), porte sur les problématiques de résolution de contraintes géométriques

Nicolas Passat et Laurent Lucas

Université de Reims Champagne-Ardenne

Responsables des journées GEODIS 2014 – Reims Image 2014

Table des matières

I - Présentations orales

Discrete differential geometry

A local algorithm to compute the normal vector of a 3D digital plane
Jacques-Olivier Lachaud, Xavier Provençal, Tristan Roussillon 11

Binomial-based derivative estimation for noisy discretized curves with low complexity
Henri-Alex Esbelin, Rémy Malgouyres 17

Exposé invité

Aspects combinatoires en résolution de contraintes géométriques
Pascal Schreck 21

Discrete transformations and discrete topology

Les Ω -AQA : représentation discrète des applications affines
Éric Andres, Marie-Andrée Da Col, Laurent Fuchs, Gaëlle Largeteau-Skapin, Nicolas Magaud, Loïc Mazo, Rita Zrour 23

Topological alterations of 3D digital images under rigid transformations
Kacper Pluta, Yukiko Kenmochi, Nicolas Passat, Hugues Talbot, Pascal Romon 31

Extraction d'information homologique des objets discrets s'appuyant sur des graphes orientés
Aldo Gonzalez-Lorenzo, Alexandra Bac, Jean-Luc Mari, Pedro Real 35

Methods and applications

Feature extraction on digital surfaces
Jérémy Levallois, David Coeurjolly, Jacques-Olivier Lachaud 41

Re-projection without reconstruction
Dimitri Pertin, Nicolas Normand 43

Segmentation de noeuds de bois à partir d'images tomographiques : approches transversales et tangentielles
Adrien Krähenbühl 49

Watervoxel representation for supporting MRI volume segmentation
David Cárdenas-Peña, Vaia Machairas, Etienne Decencière, Thomas Walter, Germán Castellanos-Dominguez 55

II - Posters

Characterization of bijective discretized rotations by Gaussian integers Tristan Roussillon, David Coeurjolly	59
Une généralisation du bien-composé à la dimension n Nicolas Boutry, Thierry Géraud, Laurent Najman	63
Structuration du squelette en graphe pour une exploitation haut niveau par ses attributs Rabaa Youssef, Sylvie Sevestre-Ghalila, Christine Chappard	69
Tubular structure filtering by ranking orientation responses of path operators Odysée Merveille, Hugues Talbot, Laurent Najman, Nicolas Passat	71
Traitement d'images multivariées avec l'arbre des formes Edwin Carlinet, Thierry Géraud	77

PRÉSENTATIONS ORALES

A local algorithm to compute the normal vector of a 3D digital plane

J.-O. Lachaud¹, X. Provençal¹ et T. Roussillon²

¹Université de Savoie

²Université Lyon

Résumé

Soit $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$ un plan discret de vecteur normal \mathbf{N} , décalage μ et épaisseur ω . Étant donné un prédicat qui, pour point X , répond à la question « est-ce que X appartient à $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$? », on souhaite décrire la géométrie de $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$. Plus précisément, on souhaite produire :

- Les valeurs exactes de \mathbf{N} , μ et ω .
- Un point d'appui supérieur (c-à-d un point X tel que $\langle X, \mathbf{N} \rangle = \omega - 1$).
- Un point d'appui inférieur (c-à-d un point X tel que $\langle X, \mathbf{N} \rangle = 0$).
- Une base du réseau $\{X \in \mathbb{Z}^3 \mid \langle X, \mathbf{N} \rangle = 0\}$.
- Un vecteur de Bezout (c-à-d un vecteur \mathbf{v} tel que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle = 1$).

Notre approche essaie de rester aussi locale que possible et ne teste pas systématiquement tous les points d'un voisinage donné. Cette technique exploite des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles afin de sélectionner les points pertinents à tester.

Let $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$ be a 3D digital plane of normal vector \mathbf{N} , shift μ and thickness ω . Given a point predicate that, for X , answers the question « does X belong to $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$? », we want to provide a complete description of $\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega)$ which consists of :

- The values of \mathbf{N} , μ and ω .
- An upper leaning point (i.e. a point X such that $\langle X, \mathbf{N} \rangle = \omega - 1$).
- A lower leaning point (i.e. a point X such that $\langle X, \mathbf{N} \rangle = 0$).
- A basis of the lattice $\{X \in \mathbb{Z}^3 \mid \langle X, \mathbf{N} \rangle = 0\}$.
- A Bezout vector (i.e. a vector \mathbf{v} such that $\langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle = 1$).

Our approach tries to remain as local as possible and does not systematically test all points in a given neighborhood. This technique uses multidimensional continued fraction algorithms in order to select relevant points to test.

Mots clé : digital geometry, digital planes recognition, algorithm, continued fractions, Delaunay triangulation.

1. Introduction

In this extended abstract we present an algorithm that allows to extract geometrical information from a digital plane. This digital plane is provided as input under the form of a point predicate that is a characteristic function

$$P : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$$

such that $P(\mathbf{x}) \iff \mathbf{x}$ is a point of the digital plane.

We consider 3D digital planes from the point of view of their arithmetic definition, which in arbitrary dimension d , is :

$$\mathcal{P}(\mathbf{N}, \mu, \omega) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle + \mu < \omega\}$$

Throughout this work, we only consider the case where :

- all coordinates of \mathbf{N} are strictly positive integers,
- $\text{gcd}(\mathbf{N}) = 1$,
- $\mu = 0$,
- $\omega = \|\mathbf{N}\|_1$.

In order to simplify the notations, $\mathcal{P}(\mathbf{N}, 0, \|\mathbf{N}\|_1)$ is noted $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. Moreover, we use the convention that the scalar product of a vector \mathbf{x} with the normal vector \mathbf{N} , that is $\langle \mathbf{x}, \mathbf{N} \rangle$, is noted \bar{x} .

The arithmetical definition of digital planes, provides a total order on the points of $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ which is

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \bar{x} \leq \bar{y}.$$

The points that are minimal according to this order are called *lower leaning points* while those that are maximal are called *upper leaning points*. Geometrically these points are

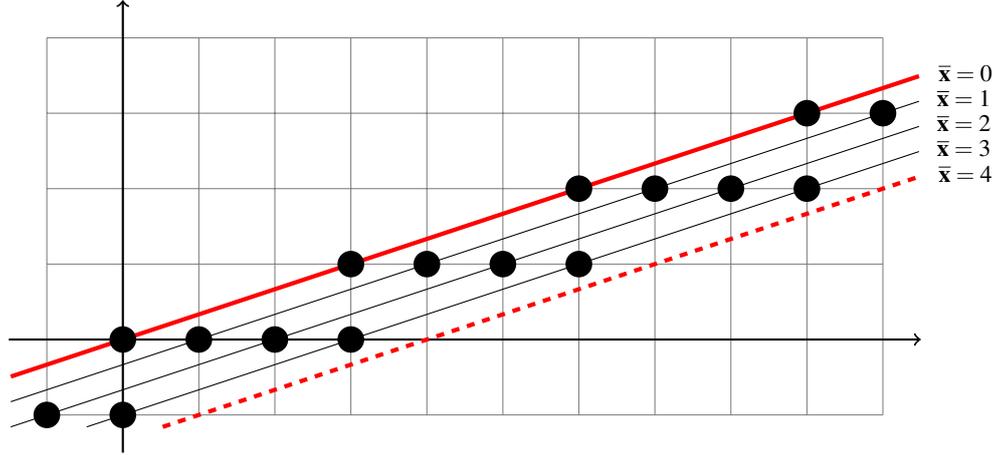


Figure 1: The digital straight line $\mathcal{P}((1, -3)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \bar{x} < 4\}$. For each $c \in \{0, 1, 2, 3\}$, the points $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ such that $\bar{x} = c$ are regularly disposed along a line. The upper leaning points are along the line $\bar{x} = 3$ while the lower leaning points are along the line $\bar{x} = 0$.

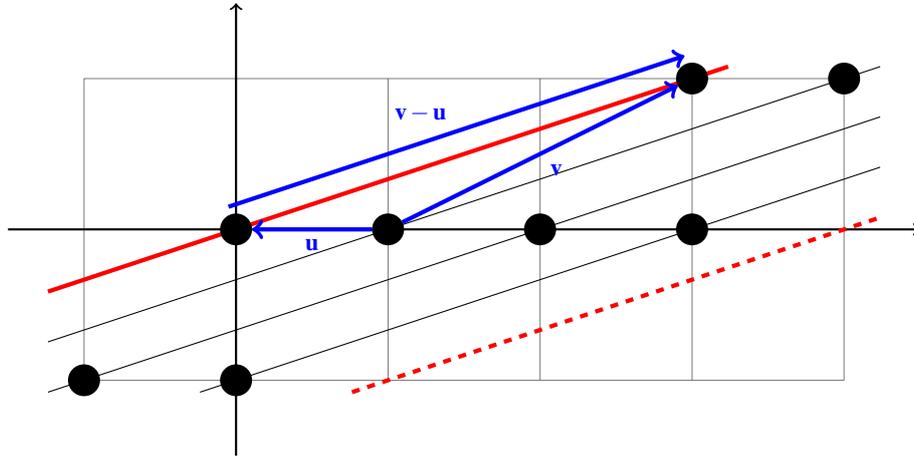


Figure 2: Closeup view of Figure 1, vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} are two linearly independent Bezout vectors and their difference $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ forms a basis for the lattice $\bar{x} = 0$.

meaningful since they are the only ones on the border of the convex hull of the digital plane.

It is well known that the set of points $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \bar{x} = 0\}$ forms a $(d - 1)$ -dimensional lattice. Given an integer $c \in \mathbb{Z}$ the set $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \bar{x} = c\}$ is a translated copy this lattice. This splits the points of $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ into different *levels*, a level being the set of points whose scalar product with \mathbf{N} is equal to a given value. For $d = 2$, we have that $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ is a digital straight line and points from each level are regularly disposed along parallel lines as illustrated in Figure 1. This generalizes to higher dimensions, for instance in dimension three, points from each level are disposed on parallel planes.

An integer vector \mathbf{v} such that $\bar{v} = 1$ is called a *Bezout* vector. These vectors play an important role in the geometry of a digital plane since they allow to move from a level to another. Given d linearly independent Bezout vectors b_1, b_2, \dots, b_d , let $\mathcal{B} = \{b_2 - b_1, b_3 - b_1, \dots, b_d - b_1\}$. Vectors of \mathcal{B} are $d - 1$ linearly independent vectors of the lattice

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \bar{x} = 0\}$ (see Figure 2 for an illustration) and the normal vector \mathbf{N} can easily be deduced from \mathcal{B} .

Our goal is, given a point predicate P for a digital plane $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, to produce a triplet $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ of linearly independent Bezout vectors and at least one upper leaning point. The whole geometrical structure of the digital plane can be easily deduced from these information.

2. Basic notions

Three vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{Z}^3$ are said to be *unimodular* if they are such that the matrix

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

is unimodular, that is $|M| = 1$.

The idea behind our algorithm is to start from a triplet

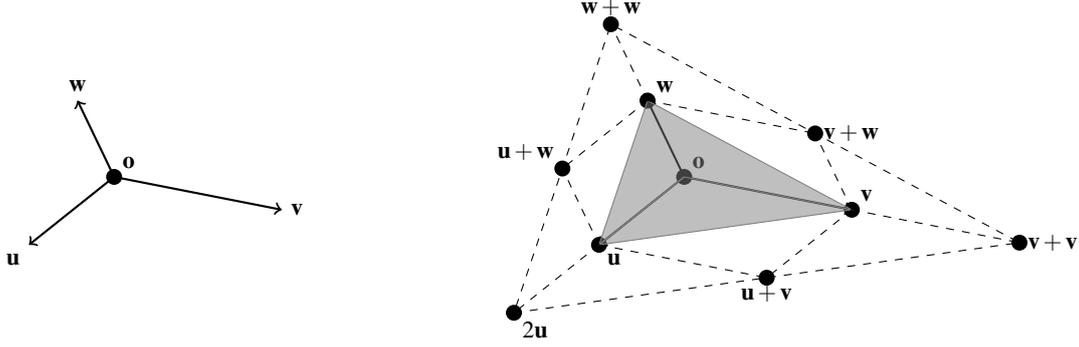


Figure 3: Left : a system is given by a point o and three vectors u, v, w . Right : the system is represented as a tetrahedon. Local configurations only consider six points around the system. These points belong to $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$. Note that in order to simplify the figure, labels are given relatively to o , so that the point labeled u is in fact $o + u$.

of unimodular vectors and to make them evolve in order to build three Bezout vectors. At each step we make sure that the three vectors remain unimodular which ensures their linear independence.

Definition 1 A system is a tuple $\mathfrak{S} = (u, v, w, o) \in (\mathbb{Z}^3)^4$. A system is valid if

- (1) $P(o), P(o+u), P(o+v), P(o+w)$,
- (2) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} > 0$,
- (3) $\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = 1$,

The normal of a system \mathfrak{S} is the vector :

$$\hat{N}(\mathfrak{S}) := (v - u) \times (w - u)$$

Definition 2 An operation is a function $\lambda : (\mathbb{Z}^3)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}^3)^4$ such that given $(u', v', w', o') = \lambda((u, v, w, o))$, there exists a matrix M_λ that satisfies :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = M_\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Definition 3 Given an operation λ and a valid system $\mathfrak{S} = (u, v, w, o)$, the operation λ is valid on \mathfrak{S} if

- $(u', v', w', o') = \lambda(\mathfrak{S})$ is a valid system,
- $\bar{o}' > \bar{o}$,

Note that, the first condition implies that $|M_\lambda| = 1$.

Algorithm 1 is a meta-algorithm that describes the main steps of the computation. In this section, we present all the operations that we use and, for each of them, a sufficient condition for this operation to be valid on a system.

The termination of this algorithm is obvious since, by the definition of a valid operation, \bar{o} is a strictly increasing integer bounded by ω . We claim that when our algorithm stops, the output system has the following properties :

- $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 1$,
- $\bar{o} = \omega - 2$,
- $\{v - u, w - u\}$ is a basis of the lattice $\{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \bar{x} = 0\}$.

In other words, $o + \{u, v, w\}$ are three upper leaning points and u, v, w are Bezout vectors.

Algorithm 1: The principle of the algorithm.

Input: A point predicate P for $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ and a point o such that $P(o), P(o+e_1), P(o+e_2), P(o+e_3)$;

Output: A system $\mathfrak{S} = (u, v, w, o)$;

- 1 $\mathfrak{S} \leftarrow (e_1, e_2, e_3, o)$;
- 2 $stop \leftarrow False$;
- 3 **while not stop do**
- 4 **if** There exists a valid operation λ **then**
- 5 $\mathfrak{S} \leftarrow \lambda(\mathfrak{S})$;
- 6 **else**
- 7 $stop \leftarrow True$;
- 8 **return** \mathfrak{S} ;

3. The configurations

Given a valid system $\mathfrak{S} = (u, v, w, o)$,

- let $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ be the set $\{o, o+u, o+v, o+w\}$.
- let $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ be the set $\{o+2u, o+2v, o+2w, o+u+v, o+v+w, o+u+w\}$.

See Figure 3 for an illustration of $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ and $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$.

Since \mathfrak{S} is assumed to be valid, all points of $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ belong to P . However, the points of $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ may or may not belong to P . This point distribution, which is called *configuration*, may provide some evidence about the relative order of $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ and thus the normal vector N .

There are two kinds of operations : *local* operations that only consider the six points of $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}}$ and *global* operations that consider points at an arbitrary distance from o . Global operation are triggered when the *empty* configuration is detected, that is the case where $\mathcal{N}_{\mathfrak{S}} \cup \mathcal{P}(\mathbf{N}) = \emptyset$.

3.1. Local operations

In this section, we present the three types of local operations. Each of these operations is described relatively to vector u while they may be considered relatively to any vector among u, v, w . More precisely, we consider the three vectors u, v, w up to a permutation σ . For example, if σ is the

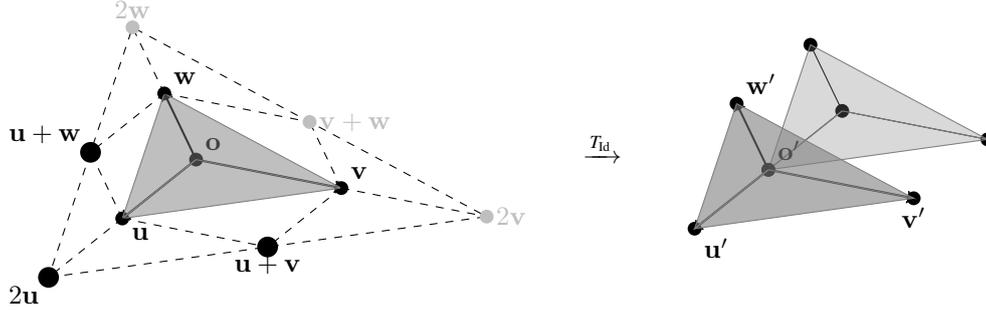


Figure 4: Illustration of the Translation operation T_{Id} .

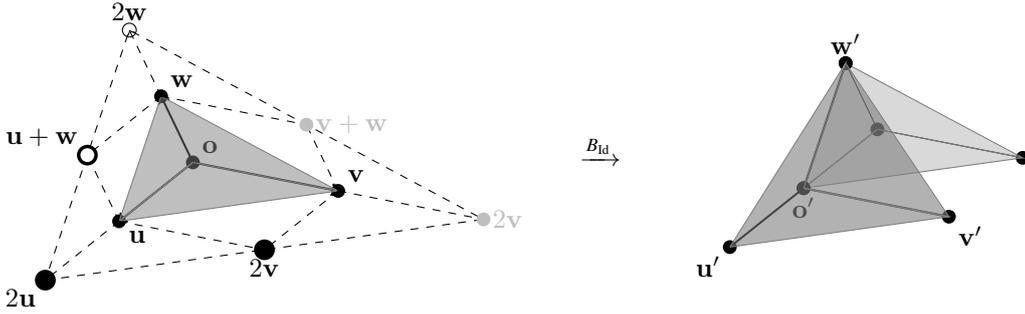


Figure 5: Illustration of the Brun operation B_{Id} .

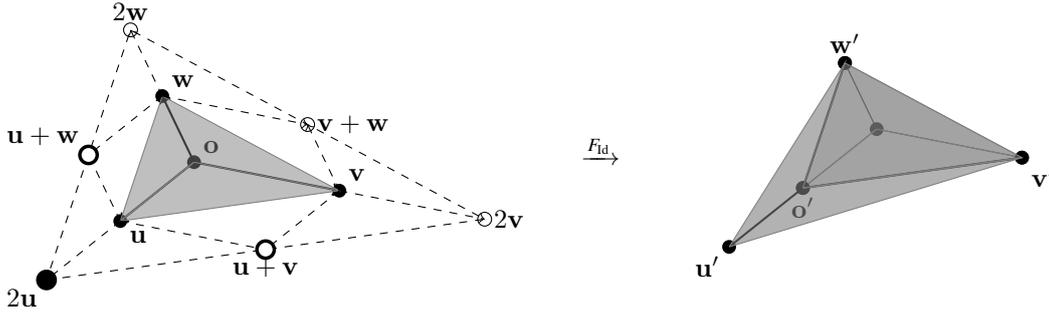


Figure 6: Illustration of the Fully Subtractive operation F_{Id} .

permutation (v, w, u) , then we have $\sigma(u) = v$, $\sigma(v) = w$ and $\sigma(w) = u$. The identity permutation is written Id .

For each of these operations, we provide a list of *preconditions*. We claim that if a system \mathfrak{S} satisfies all the preconditions for an operation λ , then λ is valid on \mathfrak{S} .

The actions of each of these three operations are shown in Figures 4, 5 and 6

3.1.1. Translations T_σ

Preconditions for T_{Id} : $P(o + 2u), P(o + u + v), P(o + u + w)$.
Operation T_{Id} :

$$\begin{aligned} o' &= o + u \\ u' &= u \\ v' &= v \\ w' &= w \end{aligned} \quad M_{T_{Id}} := Id$$

3.1.2. Brun B_σ

Preconditions for B_{Id} :

- $P(o + 2u), P(o + u + v)$,
- $\neg P(o + u + w)$.

Operation B_{Id} :

$$\begin{aligned} o' &= o + u \\ u' &= u \\ v' &= v \\ w' &= w - u \end{aligned} \quad M_{B_{Id}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3.1.3. Fully Subtractive F_σ

Preconditions for F_{Id} :

- $P(o + 2u)$,
- $\neg P(o + u + v), \neg P(o + u + w)$.

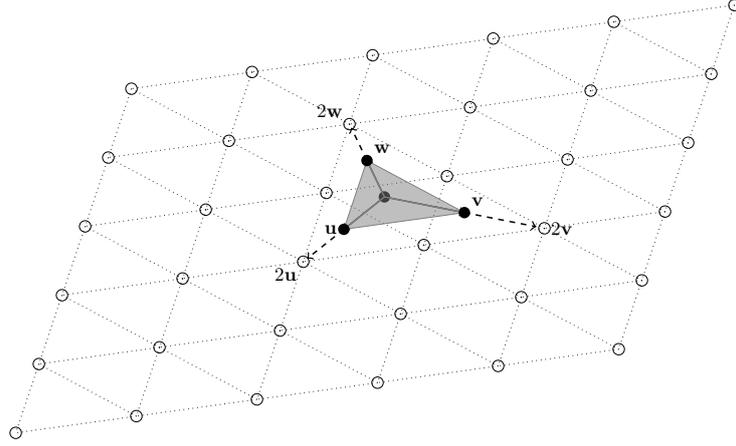


Figure 7: Illustration of the lattice above the tetrahedron. In general, this lattice is not parallel to the digital plane P and thus, in some directions this lattice intersects P .

Operation F_{Id} :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{w} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$M_{F_{\text{Id}}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3.2. Global operations

Local operations alone may not always find the normal vector of digital plane since two digital planes with different normal vectors may be identical for arbitrary large regions. In order to compute the normal vector in all cases, we introduce global operations that are based on the exploration of a lattice above the tetrahedron formed by a system.

3.2.1. Lattice above tetrahedron

As long as $\mathbf{o} + 2\mathbf{x} \in P$ for at least one $\mathbf{x} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, then the preconditions of at least one of the local operations are satisfied. Consequently, global operations consider only the case where $\mathbf{o} + 2\mathbf{u}, \mathbf{o} + 2\mathbf{v}, \mathbf{o} + 2\mathbf{w} \notin P$. Note that by linearity this implies also that for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ we also have that $\mathbf{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y} \notin P$. In other words, all points considered for the local operations are outside P .

Let $\mathbb{L} = \{\mathbf{o} + 2\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$, this lattice is illustrated in Figure 7. Note that \mathbf{u} does not play a particular role in this definition since any permutation of $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ defines the same lattice. On the other hand, in order to lighten the presentation of the upcoming sections, given a permutation σ , we define :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_\sigma : \quad \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{Z}^3 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \mathbf{o} + 2\sigma(\mathbf{u}) + \alpha(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{v})) \\ &\quad + \beta(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{w})) \end{aligned}$$

3.2.2. Generalized Fully Subtractive $F_\sigma^{\alpha, \beta}$

This operation is defined for any pair of non-negative integer (α, β) such that $\alpha + \beta > 0$.

Preconditions for $F_{\text{Id}}^{\alpha, \beta}$:

- $\neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{u}), \neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{v}), \neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{w})$,
- $P(\mathbb{L}_\sigma(\alpha, \beta))$,
- $\neg P(\mathbb{L}_\sigma(\alpha - 1, \beta))$ and $\neg P(\mathbb{L}_\sigma(\alpha, \beta - 1))$.

Operation $F_{\text{Id}}^{\alpha, \beta}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$M_{F_{\text{Id}}^{\alpha, \beta}} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha + \beta & -\alpha & -\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

The action of this operation is shown in Figure 8. Note that the local Fully Subtractive operation is the case where $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

3.2.3. Generalized Brun B_σ^β

This operation is defined for any integer $\beta \geq 1$.

Preconditions for B_{Id}^β :

- There exist no valid $F_\sigma^{\alpha', \beta}$,
- $\neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{u}), \neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{v}), \neg P(\mathbf{o} + 2\mathbf{w})$,
- $P(\mathbb{L}_\sigma(0, \beta))$,

Operation B_{Id}^β :

$$\begin{aligned} \mathbf{o}' &= \mathbf{o} + \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \\ \mathbf{w}' &= \mathbf{w} - \mathbf{u} \end{aligned} \quad M_{B_{\text{Id}}^\beta} := \begin{bmatrix} 1 + \beta & 0 & -\beta \\ \beta & 1 & -\beta \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

The action of this operation is shown in Figure 9. Note that the local operation B_σ is the case where $\beta = 0$.

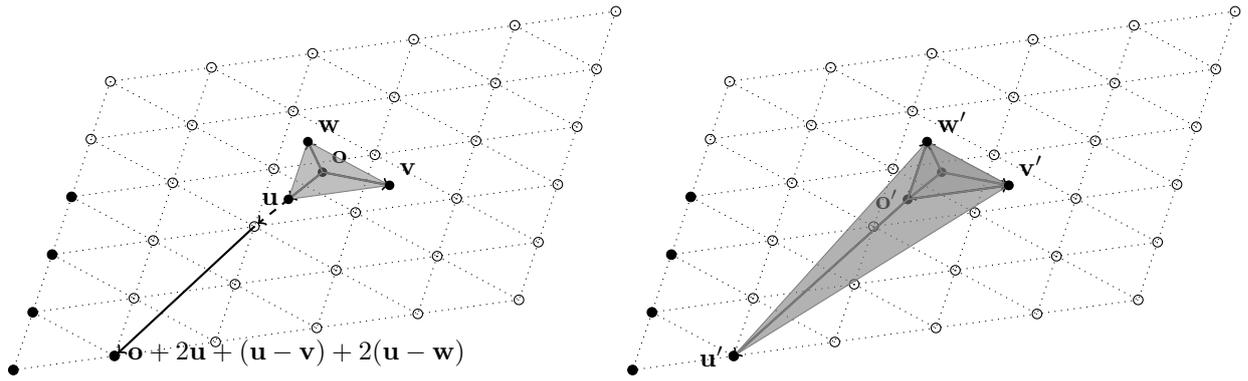


Figure 8: Illustration of the generalized Fully Subtractive operation $F_{\text{Id}}^{1,2}$.

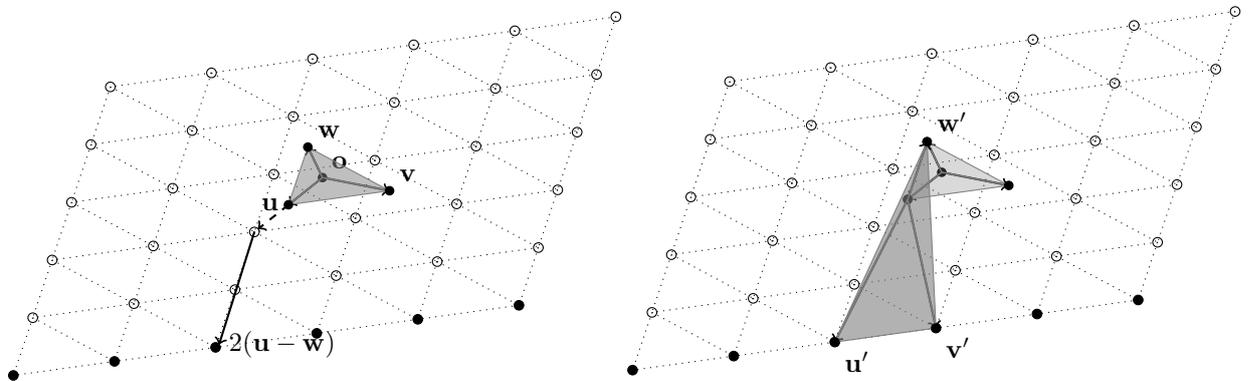


Figure 9: The generalized Brun operation B_{Id}^2 .

Binomial-based derivative estimation for noisy discretized curves with low complexity

H.-A. Esbelin¹ et R. Malgouyres²

¹Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France

²Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand, France

Résumé

Previous work on convolution-based derivative estimation provided an estimator with good theoretical and empirical properties of convergence. However it was expensive in term of computational complexity. We present here a new idea providing the same rate of convergence but with a very low computational complexity. This idea was previously used in connection with Taylor optimal masks. It turns out that it is more efficient with Binomial masks.

Des travaux antérieurs sur l'estimation de dérivées par convolution ont permis d'élaborer un estimateur convergent, au prix d'une grande complexité de calcul. Nous présentons ici une idée nouvelle qui permet d'atteindre la même vitesse de convergence, mais au prix d'une faible complexité de calcul. Cette idée a déjà été utilisée avec des masques "Taylor-optimaux". Elle apparaît efficace aussi dans le cas des masques binomiaux.

Mots clé : convolution, binomial masks, derivative estimation

1. Introduction

Previous work on convolution-based derivative estimation provided an estimator with good theoretical and empirical properties of convergence. However it was expensive in term of computational complexity. In this paper a new idea is used, providing an estimator with the same rate of convergence but with a very low computational complexity. This idea was previously introduced independantly by LoÁrc Mazo and Etienne Baudrier for length estimator ([3]) and by the authors for Taylor optimal masks ([1], [2]). Binomial based convolutive masks have the same theoretical rate of convergence as these, but experimentations show a better empirical convergence.

2. Estimation of derivatives for real function

2.1. Definitions

Functions for which domain and range are 1-dimensional, without any assumption on the nature of these sets, are called *real functions*.

We call *discrete function* a function from \mathbb{Z} to \mathbb{Z} .

First we establish a relationship between a continuous function and its discretization. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a real function and let $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ be a discrete function. Let h be the discretization step (i.e. the size of a pixel). We introduce a (possibly noisy) digitization of f .

Definition 2.1 The function Γ is a digitization of f with error ε_h with discretization step h on the interval I if for any integer i such that $ih \in I$ we have:

$$h\Gamma(i) = f(ih) + \varepsilon_h(i)$$

We consider the following particular cases :

- Digitization, i.e. the rounded case: $|\varepsilon_h(i)| \leq \frac{1}{2}h$ which is equivalent to $\Gamma(i) = \left\lfloor \frac{f(ih)}{h} \right\rfloor$ or the floor case: $0 \leq \varepsilon_h(i) < h$ which is equivalent to $\Gamma(i) = \left\lfloor \frac{f(ih)}{h} \right\rfloor$
- Uniform bias: $0 \leq |\varepsilon_h(i)| \leq Kh^\alpha$ with $0 < \alpha \leq 1$ and K a positive constant. Note that the round case and the floor case are particular cases of uniform noise with $\alpha = 1$.

Definition 2.2 A *binomial derivative mask* is a sequence $\mathcal{B}_{m,p}$ defined by $\mathcal{B}_{m,p,i} = \frac{1}{p^{2^{2m}-1}} \left(\binom{2m-1}{m-1-\frac{i}{p}} - \binom{2m-1}{m-\frac{i}{p}} \right)$ if p divides i and $-mp \leq i \leq mp$, and $\mathcal{B}_{m,p,i} = 0$ in any other cases. Its associated *discrete derivative operator* is the function $\Delta_{\mathcal{B}_{m,p}}$ with domain $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ and codomain $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$ defined by

$$\Delta_{\mathcal{B}_{m,p}}(\mathbf{v})(n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_{m,p,i} v_{n-i}. \quad (1)$$

Let us notice first that the complexity of the computation depends mainly on the parameter ml . In practice, m will be 3 to 9. The discrete derivative of Γ is intended to approximate the continuous derivative of f . Evaluating the errors and proving the convergence need to evaluate $\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^k \mathcal{B}_{m,p,i}$ and $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^k \mathcal{B}_{m,p,i}|$.

Proposition 2.1 We have the following equalities:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_{m,p,i} = 0, \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \mathcal{B}_{m,p,i} = -1 \text{ and } \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 \mathcal{B}_{m,p,i} = 0.$$

Proposition 2.2 We have the following equalities: $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\mathcal{B}_{m,p,i}| = \frac{1}{p} \frac{2^{2m-1}}{2^{2m-2}} \binom{2m-1}{m-1}$ and $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i \mathcal{B}_{m,p,i}| = 1$ and $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^2 \mathcal{B}_{m,p,i}| = \frac{(2m-1)p}{2^{2m-2}} \binom{2m-2}{m-1}$ and $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^3 \mathcal{B}_{m,p,i}| = p^2 \frac{3m-1}{2}$.

The following table provides the values of $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^k \mathcal{B}_{m,p,i}|$ for usual m .

m	5	6	7	8	9
k					
0	$\frac{0.493}{p}$	$\frac{0.452}{p}$	$\frac{0.419}{p}$	$\frac{0.393}{p}$	$\frac{0.371}{p}$
1	1	1	1	1	1
2	$2.461p$	$2.707p$	$2.932p$	$3.142p$	$3.338p$
3	$7p^2$	$8.5p^2$	$10.0p^2$	$11.5p^2$	$13p^2$

Table 1: Usual values of $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^k \mathcal{B}_{m,p,i}|$

Théorème 2.1 Suppose that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a C^k function and $f^{(k)}$ is bounded, $\alpha \in]0, 1]$, $K \in \mathbb{R}_+^*$ and $h \in \mathbb{R}_+^*$. Suppose $\Gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ is such that $|h\Gamma(i) - f(hi)| \leq Kh^\alpha$ for all i (uniform noise case). Then

$$\text{for } k = 3 \text{ and } p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/3} \rfloor,$$

$$\text{we have } |(\Delta_{\mathcal{B}_{m,p(h)}} \star \Gamma)(n) - f'(nh)| \in O(h^{2\alpha/3})$$

$$\text{for } k = 2 \text{ and } p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/2} \rfloor,$$

$$\text{we have } |(\Delta_{\mathcal{B}_{m,p(h)}} \star \Gamma)(n) - f'(nh)| \in O(h^{\alpha/2})$$

$$\text{and for } k = 1 \text{ and } p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/2} \rfloor,$$

$$\text{we have } |(\Delta_{\mathcal{B}_{m,p(h)}} \star \Gamma)(n) - f'(nh)| \in o(1)$$

Proof

In order to show that the discrete derivative of a digitization Γ of a real function f provides an estimate for the continuous derivative of f , we would like to evaluate the difference between $(\Delta_{\mathcal{B}_{m,p}} \star \Gamma)(n)$ and $f'(nh)$. It may be obviously seen as the sum of $ES(f, h, \Gamma, n)$ called sampling error and $EV(f, h, \Gamma, n)$ called values error respectively defined as

$$ES(f, h, \Gamma, n) = \left(\frac{1}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_{m,p,i} f((n-i)h) \right) - f'(nh)$$

and

$$EV(f, h, \Gamma, n) = \frac{1}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_{m,p,i} \varepsilon_h(n-i)$$

We first straightforwardly majorize the values error:

$$|EV(f, h, \Gamma, n)| \leq \frac{\|\varepsilon_h\|_\infty}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\mathcal{B}_{m,p,i}| \leq \frac{K}{ph^{1-\alpha}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m-1}{m-1}.$$

If $p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/3} \rfloor$ (resp. $p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/2} \rfloor$), it is easy to verify that $\frac{1}{ph^{1-\alpha}} \leq \frac{h^{2\alpha/3}}{1-h^{1-\alpha/3}}$ (resp. $\frac{1}{ph^{1-\alpha}} \leq \frac{h^{\alpha/2}}{1-h^{1-\alpha/2}}$).

We turn now to the sampling error.

• Let f be C^3 on \mathbb{R} . From Taylor formula, $ES(f, h, \Gamma, n)$ turns out to be equal to:

$$\frac{1}{h} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_{m,p,i} \left(\sum_{j=0}^{i=2} \frac{(-ih)^j}{j!} f^{(j)}(nh) - \frac{(ih)^3}{6} f^{(3)}(\zeta_i) \right) - f'(nh) \quad (2)$$

where ζ_i lies between nh and $(n-i)h$. From the previous lemma, we get:

$$ES(f, h, \Gamma, n) = \frac{-h^2}{6} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^3 \mathcal{B}_{m,p,i} f^{(3)}(\zeta_i) \right)$$

$$|ES(f, h, \Gamma, n)| \leq h^2 \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |i^3 \mathcal{B}_{m,p,i}| \right).$$

$$|ES(f, h, \Gamma, n)| \leq (ph)^2 \frac{3m-1}{12} \|f^{(3)}\|_\infty.$$

If $p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/3} \rfloor$ (resp. $p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/2} \rfloor$), it is easy to verify that $|ES(f, h, \Gamma, n)| \leq h^{2\alpha/3} \frac{3m-1}{12} \|f^{(3)}\|_\infty$.

• Let f be C^2 on \mathbb{R} . From Taylor formula, we get:

$$ES(f, h, \Gamma, n) = \frac{h}{2} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} i^2 \mathcal{B}_{m,p,i} f^{(2)}(\zeta_i) \right)$$

where ζ_i lies between nh and $(n-i)h$. From the previous lemma, we get:

$$|ES(f, h, \Gamma, n)| \leq ph \|f^{(2)}\|_\infty \frac{2m-1}{2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1}.$$

If $p(h) = \lfloor h^{-1+\alpha/2} \rfloor$, it is easy to verify that

$$|ES(f, h, \Gamma, n)| \leq h^{\alpha/2} \|f^{(2)}\|_\infty \frac{2m-1}{2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1}.$$

• Let f be C^1 on \mathbb{R} . From Taylor formula, $ES(f, h, \Gamma, n)$ turns out to be equal to:

$$\left(\sum_{j=-m}^{j=m} \frac{j}{2^{2m-1}} \left(\binom{2m-1}{m-1-j} - \binom{2m-1}{m-j} \right) \right) \varepsilon((n-jp)h) \quad (3)$$

where $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

□

3. Experimentations

The two pictures (1) illustrate the distribution of the discrete values for fixed resoution $r = \frac{1}{h}$ and various steps p .

The two pictures (2) illustrate the convergence for fixed resoution $r = \frac{1}{h}$ and variable step p .

The two pictures (3) illustrate the convergence for a variable resolution $r = \frac{1}{h}$.

4. Conclusion

Our purpose is now to develop this method for approximating other differential notions such as second order derivatives, normal field of parametrized curves, curvature, ... Computation of the second order discrete derivative consists in applying twice the first order discrete derivative. The picture (4) shows that the convergence is not so fast, but that the approximation remains not so bad.

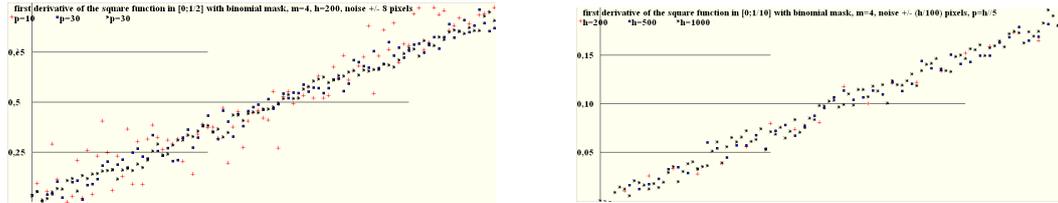


Figure 1: Estimated values for the derivative of the square function

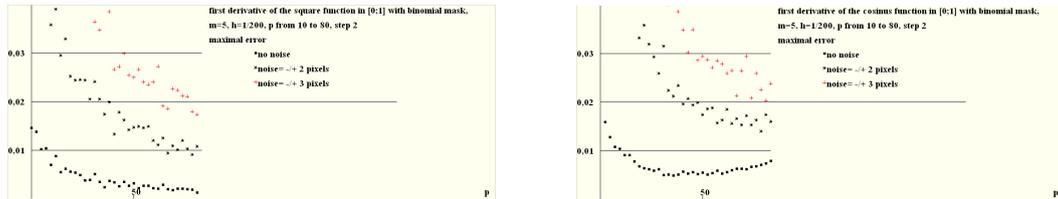


Figure 2: Maximal error for the derivative of the square function for various p

[1] Esbelin H.-A., Malgouyres R., Cartade C., Convergence of binomial-based derivative estimation for 2 noisy discretized curves, Theoretical Computer Science 412 (2011) 4805 - 4813.

[2] Esbelin H.-A., Malgouyres R., Taylor Optimal Kernel for Derivative Estimation, Discrete Geometry for Computer Imagery Lecture Notes in Computer Science Volume 8668, 2014, pp 384-395

[3] Mazo L., Baudrier E., About Multigrid Convergence of Some Length Estimators, Discrete Geometry for Computer Imagery Lecture Notes in Computer Science Volume 8668, 2014, pp 214-225

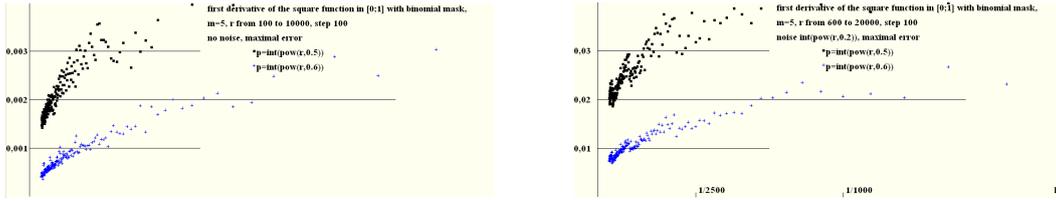


Figure 3: Maximal error for the derivative of the square function for various discretisation steps

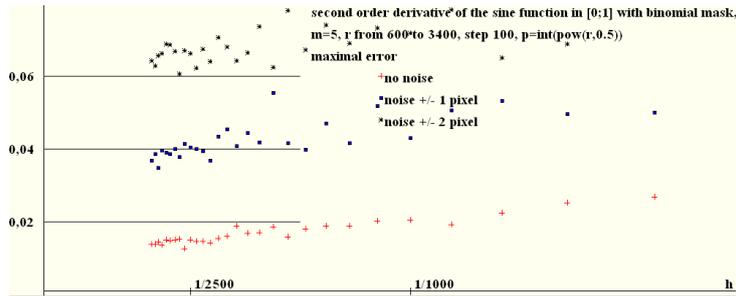


Figure 4: Maximal error for the second order derivative of the sine function for various discretisation steps

Pascal Schreck

Pascal Schreck est professeur d'informatique à l'Université de Strasbourg. Ses centres d'intérêt incluent les spécifications formelles, les problèmes de résolution de contraintes et en particulier, la résolution des systèmes de contraintes géométriques. Il s'est aussi intéressé à la preuve automatique ou avec un assistant de preuves en géométrie.

Aspects combinatoires en résolution de contraintes géométriques

La résolution de contraintes en géométrie fait partie de la problématique des CSP (Constraint Satisfaction Problems) avec la particularité de considérer généralement des contraintes continues, les méthodes de résolution du domaine tirant habituellement parti de ce fait. Cependant, dans diverses circonstances, des raisonnements combinatoires peuvent aider à résoudre ce type de systèmes de contraintes. Sans prétendre être exhaustif, j'essaierai de présenter le domaine de la résolution de contraintes géométriques en mettant en avant ces aspects combinatoires.

Les Ω -AQA : Représentation discrète des applications affines

E. Andres¹, M.- A. Da Col², L. Fuchs¹, G. Largeteau-Skapin¹, N. Magaud², L. Mazo² et R. Zrour¹

¹Université de Poitiers

²Université de Strasbourg

Résumé

La droite d'Harthong-Reeb est un modèle numérique du continu basé sur les entiers. La construction de cette droite en utilisant les Ω -entiers permet de décrire les objets mathématiques réels de manière discrète et constructive. En informatique graphique on est souvent amené à transformer des objets (images) par des applications affines réelles (rotations, translations, similitudes...). Des discrétisés (à une échelle donnée) de ces applications, appelées applications quasi-affines ont été définies et étudiées. Dans ce papier, nous rappelons les définitions et propriétés de base des Ω -entiers, de la droite de Harthong-Reeb et des applications quasi-affines. Nous montrons ensuite comment définir des Ω -AQAs qui sont les discrétisés «multi-échelle» des applications affines suivant la théorie des Ω -entiers et la définition initiale des AQAs. Enfin nous donnons les premières propriétés de ces Ω -AQAs.

The Hartong-Reeb line is a numerical model of the continuum based on integers. The construction of this line using Ω -integers allows to describe the real mathematical objects in a discrete and constructive way. In computer graphics we are often subject to transform objects (images) using real affine applications (rotations, translations, similarities...). A discretization (at a given scale) of such applications, named quasi-affine applications (AQAs) has been defined and studied. In this paper, we recall the definitions and main properties of Ω -integers, Hartong-Reeb line and quasi-affine applications. We then show how to define the Ω -AQAs that are the discretization "multi-resolution" of the affine applications using the Ω -integers theory and the initial definition of the AQAs. Finally we give the first properties of the Ω -AQAs.

Mots clé : Géométrie discrète, applications affines, applications quasi-affines, droite de Harthong-Reeb, Ω -entiers.

1. Introduction

Les travaux présentés dans cet article – et qui en sont encore à un stade préliminaire – ont pour but d'une part de valider formellement, via l'assistant de preuve Coq [Coq], la représentation discrète du continu procurée par la droite de Harthong-Reeb dans le contexte de l'action d'une application affine sur une image dont le domaine est continu. D'autre part, ils visent à étudier les propriétés des suites d'applications quasi-affines (AQA) fournies par ce type de discrétisation.

La droite de Harthong-Reeb est un modèle numérique du continu basé sur les entiers [Har89, Die92], il est à l'origine de l'étude par Reveillès de la droite analytique discrète [Rev91, RR96] qui a suscité de nombreux travaux en géométrie discrète. La construction de la droite de Harthong-Reeb demande de disposer d'une théorie non-standard des entiers. Cette construction est usuellement faite dans la théo-

rie non-standard IST (Internal Set Theory) proposée par Nelson [Nel77]. Récemment certains auteurs de cet article se sont intéressés à construire la droite de Harthong-Reeb dans un autre cadre théorique, celui des Ω -entiers. Les Ω -entiers sont les entiers d'une théorie d'analyse non-standard développée par Laugwitz et Schmieden [Lau83] pendant les années cinquante, antérieurement à la théorie d'analyse non-standard de Robinson [Rob74] qui fut plus largement diffusée. Utiliser les Ω -entiers permet d'obtenir une droite de Harthong-Reeb dans un cadre théorique constructif, au sens où, pour une théorie mathématique se fondant sur la logique intuitionniste[†], les preuves sont des algorithmes [GTL89, SU06].

Cette approche a déjà permis de proposer une méthode, l' Ω -arithmétisation, de discrétisation multi-échelle de fonctions continues qui sont solutions d'une équation différen-

[†]. Pour le dire rapidement, la logique classique à laquelle on enlève le tiers exclu (c-à-d. pour une proposition p , la proposition $p \vee \neg p$ est vraie).

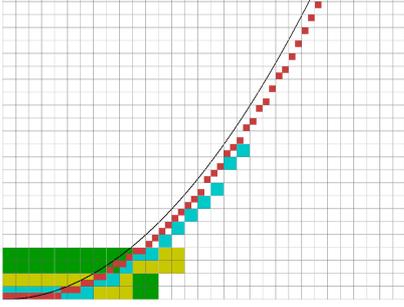


Figure 1: Exemple de représentation multi-échelle d'une fonction continue à l'aide du procédé d' Ω -arithmétisation.

tielle [CWF*12]. Il a été montré que cette méthode produit une représentation exacte[‡] de la fonction discrétisée. À titre d'illustration, la figure 1 montre un exemple d' Ω -arithmétisation d'une fonction d'équation $f(x) = \alpha x^2$ où α est un coefficient réel. Sur cette figure, les pixels des différentes échelles sont superposés, les plus gros pixels sont ceux des échelles les plus grossières et ils sont recouverts par les pixels plus petits des échelles plus fines. L'erreur d'approximation visible sur le dessin vient de la méthode de résolution numérique de l'équation différentielle, en l'occurrence la méthode d'Euler.

La droite d'Harthong-Reeb et les Ω -entiers sont présentés plus en détail dans les sections 2 et 3. La présentation faite ici est une tentative de présentation « à la mode classique » des travaux développés dans un cadre théorique constructif. Cela dans un but pédagogique afin de permettre au lecteur de s'appropriier plus facilement l'approche proposée.

Les AQA sont les équivalents discrétisés des applications affines (translations, rotations, symétries, projections) utilisées lorsque l'on veut manipuler une image. Ces AQA possèdent de nombreuses propriétés et, selon ces propriétés, leur comportement diffère plus ou moins de l'application affine dont elles sont issues [JDCT09]. La section 4 donne la définition formelle des AQA et quelques unes de leurs propriétés.

Dans la section 5, nous montrons comment le modèle de discrétisation basé sur les Ω -entiers et la droite de Harthong-Reeb conduit à associer à une application affine euclidienne une suite d'AQA.

2. Les Ω -entiers et la droite de Harthong-Reeb

Dans l'espace $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers, on considère la relation d'équivalence «être égal à partir d'un certain rang», notée \sim . On pose alors

$$\mathbb{Z}_{\Omega} = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} / \sim.$$

Les éléments de l'ensemble quotient \mathbb{Z}_{Ω} sont appelés Ω -entiers.

Les opérations d'addition et de multiplication terme à

[‡]. Au sens où l'information contenue dans la discrétisation de la fonction est suffisante pour reconstruire la fonction.

terme des suites sont compatibles avec la relation \sim . On dispose ainsi d'une addition et d'une multiplication sur les Ω -entiers, notées $+_{\Omega}$ et \times_{Ω} , qui font de \mathbb{Z}_{Ω} un anneau commutatif avec l' Ω -entier $0 =_{\text{def}} (0, 0, 0, \dots)$ comme zéro[§] et l' Ω -entier $1 =_{\text{def}} (1, 1, 1, \dots)$ comme unité.

De la même façon, on définit une inégalité stricte $<_{\Omega}$ à partir de la relation d'ordre strict usuelle dans \mathbb{Z} . La relation d'ordre associée est notée \leq_{Ω} :

$$(a \leq_{\Omega} b) =_{\text{def}} (a <_{\Omega} b) \vee (a = b)$$

Il est aisé de vérifier que $(\mathbb{Z}_{\Omega}, +_{\Omega}, \times_{\Omega}, \leq_{\Omega})$ est un anneau ordonné.

Remarquons que $a \leq_{\Omega} b$ ne signifie pas qu'il existe une suite (a_n) dans a et une suite (b_n) dans b telle que $a_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang. Par exemple les classes de la suite des entiers naturels $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ et de la suite $(2((n+1) \div 2)) = (0, 2, 2, 4, 4, \dots)$ ne sont pas comparables bien que pour n'importe lesquels de leurs représentants, on ait l'inégalité terme à terme à partir d'un certain rang. En outre, on voit avec cet exemple que la relation d'ordre \leq_{Ω} n'est pas une relation d'ordre total.

Désormais, pour alléger les notations, nous confondrons les éléments de \mathbb{Z}_{Ω} avec leurs représentants dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Remarquons que, de manière évidente, toutes les fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} sont compatibles avec la relation \sim . En particulier, pour définir les opérations de la droite de Harthong-Reeb, nous avons besoin d'introduire la valeur absolue d'un Ω -entier (application de la fonction valeurs absolue aux termes d'un représentant) et une division (entière) des Ω -entiers. Pour deux Ω -entiers $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ tels que $|b| >_{\Omega} 0$, nous posons

$$a \div_{\Omega} b =_{\text{def}} (a_n \div b'_n)$$

où $b'_n = 1$ si $b_n = 0$ et $b'_n = b_n$ sinon (on a donc $b'_n \sim b_n$). On vérifie facilement que cette opération est bien définie (c-à-d indépendante du choix des représentants). Nous utiliserons encore le produit externe, noté \cdot , d'un entier de \mathbb{Z} par un Ω -entier.

Dans \mathbb{Z}_{Ω} , on peut distinguer différentes sortes d'éléments ; les standards (suites constantes à partir d'un certain rang), les limités (suites bornées) et les infiniment grands (suites tendant en valeur absolue vers l'infini). La droite de Harthong-Reeb est construite à partir des Ω -entiers en choisissant un Ω -entier ω infiniment grand strictement positif. L'idée est de restreindre l'anneau \mathbb{Z}_{Ω} aux Ω -entiers dominés par ω et d'identifier à 0 les Ω -entiers négligeables devant ω .

Pour cela, on pose,

$$\mathcal{HR}_{\omega} =_{\text{def}} \{x \in \mathbb{Z}_{\Omega}, \exists n \in \mathbb{N}, |x| \leq_{\Omega} n \cdot \omega\}.$$

Avec les notations de Landau, on a donc $\mathcal{HR}_{\omega} = O(\omega)$.

On introduit ensuite une relation d'équivalence dans \mathcal{HR}_{ω} . Pour a et b deux Ω -entiers de \mathcal{HR}_{ω} , on écrit

$$(a =_{\omega} b) =_{\text{def}} (\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot |a - b| \leq_{\Omega} \omega).$$

[§]. Le symbole $=_{\text{def}}$ signifie que l'on définit l'expression à gauche de ce symbole par l'expression à droite de ce symbole. Cela ne peut être ni la relation d'égalité des entiers ni celle des Ω -entiers.

Deux Ω -entiers a et b sont équivalents si leur différence est négligeable devant ω : $a - b \in \mathfrak{o}(\omega)$ avec les notations de Landau. On note $[a]$ la classe d'équivalence de l'élément a de \mathcal{HR}_ω .

Enfin, on définit la droite de Harthong-Reeb $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$ comme l'espace quotient de \mathcal{HR}_ω par la relation $=_\omega$:

$$\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega =_{\text{def}} \mathcal{HR}_\omega / =_\omega.$$

En pratique, on choisit usuellement $\omega =_{\text{def}} (n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour le développement des preuves tandis que, pour les applications en informatique graphique, le choix de $\omega =_{\text{def}} (2^n)$ est souvent pertinent.

On munit $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$ des opérations suivantes :

$$[a] +_\omega [b] =_{\text{def}} [a +_\Omega b] \quad [a] \times_\omega [b] =_{\text{def}} [(a \times_\Omega b) \div \omega]$$

Ces opérations sont bien définies et on vérifie que l'élément neutre de $+_\omega$ est $[0]$ et l'opposé de $[a]$ est $[-a]$. Pour la multiplication, l'élément neutre de \times_ω est $[\omega]$. La valeur absolue d'un élément est définie par $||[a]|| =_{\text{def}} [|a|]$.

Pour comparer les éléments de $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$, on introduit une relation d'ordre dont on vérifie qu'elle est bien définie

$$([a] \leq_\omega [b]) =_{\text{def}} (\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot (a - b) \leq_\Omega \omega).$$

Ainsi, dans $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$, on a $x \leq_\omega y$ si et seulement si il existe a dans x et b dans y tels que $a \leq_\Omega b$ (ou, ce qui est équivalent, $a <_\Omega b$).

Le système numérique obtenu :

$$(\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega, +_\omega, \times_\omega, \leq_\omega)$$

est appelé droite de Harthong-Reeb sur les Ω -entiers.

La droite de Harthong-Reeb est un anneau ordonné et on peut montrer que tout élément x tel que $0 <_\omega |x|$ possède un inverse et que cet inverse est unique, défini par

$$x^{-1} = [\omega^2 \div_\Omega a]$$

où a est un représentant de x tel que $0 <_\Omega a$.

3. La droite $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$ comme un modèle du continu

En suivant l'approche proposée par Laugwitz et Schmieden [Lau83], les représentants des nombres réels sont les suites bornées de rationnels après identification des suites d'égale limite.

Toutes les définitions introduites sur les suites d'entiers pour définir les Ω -entiers se transposent aux suites de rationnels pour définir les Ω -rationnels. De cette façon, on obtient le système $(\mathbb{Q}_\Omega, +_\Omega, \times_\Omega, \leq_\Omega)$ dont on vérifie qu'il est un anneau commutatif ordonné dont tous les éléments de valeur absolue strictement positive sont inversibles.

De façon analogue aux entiers usuels, un Ω -entier se plonge dans \mathbb{Q}_Ω , il suffit de plonger dans \mathbb{Q} les termes d'une suite qui le représente. Et, de même que pour les Ω -entiers, on peut définir différentes sortes (standards, limités, infiniment grands) d' Ω -rationnels. Ainsi, un Ω -rationnel $a = (a_n)$ est limité si et seulement les suites qui le représentent sont

bornées. Cela définit $\mathbb{Q}_\Omega^{\text{lim}}$, l'ensemble des Ω -rationnels limités.

Comme pour les Ω -entiers, les fonctions de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} sont compatibles avec la relation \sim . On peut en particulier définir la partie entière et la partie fractionnaire d'un Ω -rationnel notées respectivement $[\cdot]$ et $\{\cdot\}$. Cela permet une présentation plus commode du produit de $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$. En effet, pour manipuler ce produit, il est souvent plus facile de « passer » par les Ω -rationnels. Pour cela on introduit des notations commodes. Pour a et b des Ω -rationnels, on écrit :

$$[a]_b =_{\text{def}} [a /_\Omega b] \quad \text{et} \quad \{a\}_b =_{\text{def}} \{a /_\Omega b\}$$

où $/_\Omega$ est la division de \mathbb{Q}_Ω . Ainsi, $[\cdot]_b$ et $\{\cdot\}_b$ représentent les parties entière et fractionnaire d'un réel relativement à une échelle b donnée.

Le produit de $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$ peut maintenant s'écrire

$$[a] \times_\omega [b] = [[a \times_\Omega b]_\omega] \quad (1)$$

Avec ces définitions des opérations sur les Ω -rationnels, on retrouve l'usage usuel des opérations sur les entiers et les rationnels. Il ne faut cependant pas oublier qu'on manipule des classes de suites d'entiers et de rationnels.

On dit qu'un Ω -rationnel a est infiniment petit, si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $(p \cdot |a| \leq 1)$. Autrement dit, un infiniment petit est une suite convergeant vers 0. Deux Ω -rationnels sont infiniment proches, on écrit $a \simeq b$, si leur différence est infiniment petite. Cela définit une relation d'équivalence et on pose

$$\widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}} = \mathbb{Q}_\Omega^{\text{lim}} / \simeq.$$

L'addition $+_\Omega$ et la multiplication \times_Ω de \mathbb{Q} sont compatibles avec la relation d'équivalence \simeq . Elles « passent » donc à l'ensemble quotient $\widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}}$. Par contre, la relation d'ordre doit être redéfinie :

$$a \lesssim b =_{\text{def}} (\forall p \in \mathbb{N}, p \cdot (a - b) \leq_\Omega 1).$$

Ainsi, dans $\widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}}$, on a $a \lesssim b$ si et seulement si il existe dans $\mathbb{Q}_\Omega^{\text{lim}}$ un représentant r de a et un représentant s de b tels que $r \leq_\Omega s$ (ou, ce qui est équivalent, $r <_\Omega s$).

Le système $(\widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}}, +_\Omega, \times_\Omega, \lesssim)$ englobe le système usuel des nombres réels $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ dans la théorie des Ω -nombres de Laugwitz et Schmieden [Lau83].

On décrit maintenant comment les deux systèmes $(\mathcal{HR}_\omega, +_\omega, \times_\omega, \leq_\omega)$ et $(\widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}}, +_\Omega, \times_\Omega, \lesssim)$ sont isomorphes. Commençons par introduire les fonctions ϕ_ω et ψ_ω :

$$\phi_\omega : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega & \longrightarrow & \widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}} \\ [x] & \longmapsto & [x /_\Omega \omega] \end{array} \quad (2)$$

et

$$\psi_\omega : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{Q}}_\Omega^{\text{lim}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega \\ [u] & \longmapsto & [[\omega \times_\Omega u]] \end{array} \quad (3)$$

où $x \in \mathcal{HR}_\omega$ et $u \in \mathbb{Q}_\Omega^{\text{lim}}$ et $[\cdot]$ dénote une classe d'équivalence pour la relation $=_\omega$ ou \simeq .

On vérifie aisément que les fonctions ϕ_ω et ψ_ω sont bien

définies et sont des isomorphismes d'anneaux ordonnés. À titre d'illustration voici la preuve que ϕ_ω est un morphisme pour la multiplication \times_ω .

$$\begin{aligned}\phi_\omega([x] \times_\omega [y]) &= \phi_\omega([\lfloor x \times_\Omega y \rfloor_\omega]) \\ &= \left[\frac{1}{\omega} \times_\Omega \left[\frac{x \times_\Omega y}{\omega} \right] \right] \\ &= \left[\frac{x \times_\Omega y}{\omega^2} - \frac{1}{\omega} \times_\Omega \left\{ \frac{x \times_\Omega y}{\omega} \right\} \right] \\ &= \left[\frac{x \times_\Omega y}{\omega^2} \right] = \left[\frac{x}{\omega} \right] \times_\Omega \left[\frac{y}{\omega} \right] \\ &= \phi_\omega(x) \times_\Omega \phi_\omega(y)\end{aligned}$$

car $\left| \left\{ \frac{x \times_\Omega y}{\omega} \right\} \right| < 1$ et ainsi $\frac{1}{\omega} \times_\Omega \left\{ \frac{x \times_\Omega y}{\omega} \right\} \simeq 0$.

Il est aussi intéressant de voir comment l'on prouve que ϕ_ω et ψ_ω sont bijectives et inverses l'une de l'autre.

Pour la première équation, on a

$$\psi_\omega \circ \phi_\omega([x]) = \psi_\omega([\lfloor x / \Omega \rfloor_\omega]) = [\lfloor \omega \times_\Omega (x / \Omega) \rfloor] = [x]$$

et pour la seconde

$$\begin{aligned}\phi_\omega \circ \psi_\omega([x]) &= \phi_\omega([\lfloor x \times_\Omega \omega \rfloor]) \\ &= [\lfloor x \times_\Omega \omega \rfloor / \Omega] \\ &= [x - \{x \times_\Omega \omega\} / \Omega] \\ &= [x]\end{aligned}$$

car $|\{x \times_\Omega \omega\}| < 1$ et ainsi $\{x \times_\Omega \omega\} / \Omega \simeq 0$.

4. Les applications quasi-affines

En informatique graphique on est souvent amené à transformer des objets ou des images par des applications affines (rotations, homothéties, translations...). Dans \mathbb{R}^n une telle transformation est définie à l'aide d'une matrice M et d'un vecteur V , les deux étant à coefficients réels. Or les objets traités peuvent être vus comme des sous-ensembles de \mathbb{Z}^n , le résultat de la transformation étant également un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . On définit alors les transformations sur ces objets à l'aide de matrices et vecteurs à coefficients rationnels et en composant le résultat avec une fonction partie entière. On obtient alors la définition suivante.

Définition 1. Soit M une matrice carrée de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$, V un vecteur de \mathbb{Z}_n et ω un entier strictement positif, une AQA associée au triplet (M, V, ω) est l'application définie par :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ X & \longmapsto & \left[\frac{MX+V}{\omega} \right] \end{array}$$

où $[\cdot]$ désigne une fonction partie entière qui est appliquée à chaque élément de $\frac{MX+V}{\omega}$.

Si on considère l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & \frac{MX+V}{\omega} \end{array}$$

on obtient une application bijective (en supposant que le déterminant de M est différent de 0). L'application quasi-affine définie par le même triplet n'est pas forcément bijective, en effet deux éléments différents de \mathbb{Z} peuvent avoir la même

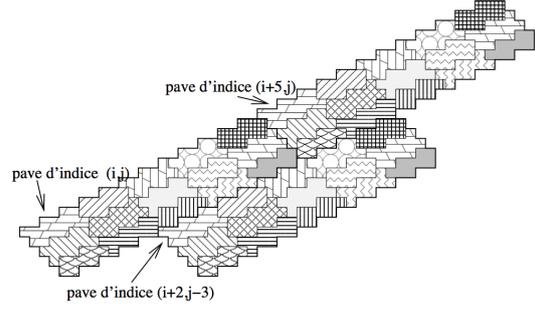


Figure 2: Exemples de pavés

image et certains éléments de l'espace image peuvent ne pas avoir d'antécédent. On définit alors les pavés associés à une AQA :

Définition 2. Le pavé d'indice $Y \in \mathbb{Z}^n$ associé à une AQA g est défini par :

$$P_Y = \{X \in \mathbb{Z}^n \mid g(X) = Y\}$$

Les propriétés de ces pavés et d'autres propriétés des AQA ont été étudiés dans [JDCT09]. On y voit notamment que l'ensemble des pavés est périodique, en dimension 2 nous avons le résultat suivant.

Théorème 1. Il existe un ensemble d'indices I tel que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, il existe $(i_0, j_0) \in I$ et un vecteur v tels que $P_{(i,j)} = T_v P_{(i_0, j_0)}$ où T_v désigne la translation de vecteur v .

La figure 2 est une illustration du théorème précédent. Deux pavés ayant la même texture sont deux pavés égaux modulo $[g]$. Nous avons entouré en gras l'ensemble des pavés dont l'indice appartient à $I = [0, 4] \times [0, 2]$.

Dans la suite nous verrons que pour définir une application affine dans \mathcal{HR}_ω^d , nous définissons en fait une suite d'applications quasi-affines.

5. Les Ω -applications quasi-affines

Dans cette section nous comparons les applications affines aux suites d'applications quasi-affines. L'objectif est de modéliser conjointement la discrétisation de l'espace euclidien \mathbb{R}^d et la quantification des paramètres d'une application affine puis d'étudier les propriétés de cette double discrétisation.

Définition 3. On appelle Ω -AQA, une application affine définie sur un espace $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega^d$ où ω est un infiniement grand de \mathbb{Z}_Ω et $d \in \mathbb{N}^*$.

Nous montrons d'abord le lien entre les Ω -AQA et les AQA (et ainsi justifions la dénomination des Ω -AQA). Dans la suite, le dénominateur d'une AQA est le plus petit des entiers naturels w apparaissant dans un triplet (A, V, w) associé à cette AQA.

Théorème 2. Soit une application $f: \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega^d \rightarrow \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega^d$. Alors, f est affine si et seulement si il existe une suite bornée d'applications quasi-affines $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de dénominateurs $\alpha(n)$ telle que $[\alpha] = \omega$ et, pour tout vecteur x de \mathcal{HR}_ω^d , $f(x) = \left[(g_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \right]_{\sim} =_{\omega} (x_n)$ où (x_n) est un représentant quelconque de x dans \mathbb{Z}^d .

Démonstration. On suppose que f est affine. Quitte à remplacer d par $d + 1$ et à utiliser des coordonnées homogènes, on peut supposer qu'il existe une matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d,d}(\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega)$ telle que f soit définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega^d & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{HR}}_\omega^d \\ \tilde{X} & \longmapsto & \tilde{A} \tilde{X} \end{array}$$

Alors, pour un vecteur $\tilde{X} = (\tilde{x}_i)$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega)$, on a

$$\tilde{A} \tilde{X} = \left(\sum_j \tilde{a}_{i,j} \times_\omega \tilde{x}_j \right).$$

On passe ensuite dans \mathbb{Q}_Ω grâce au plongement de \mathbb{Z}_Ω dans \mathbb{Q}_Ω décrit à la section 3 : pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{Z}_\Omega)$ représentant \tilde{A} et tout vecteur $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{Z}_\Omega)$ représentant \tilde{X} , on a $\tilde{A} \tilde{X} = [Y]$ où $Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{Q}_\Omega)$ est défini par

$$Y = \left(\sum_j [a_{i,j} \times_\Omega x_j]_\omega \right).$$

On a alors,

$$\begin{aligned} Y &= \left(\sum_j \frac{a_{i,j} \times_\Omega x_j}{\omega} - \sum_j \{a_{i,j} \times_\Omega x_j\}_\omega \right) \\ &= \left(\left[\sum_j a_{i,j} \times_\Omega x_j \right]_\omega + \left\{ \sum_j a_{i,j} \times_\Omega x_j \right\}_\omega - \sum_j \{a_{i,j} \times_\Omega x_j\}_\omega \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\tilde{A} \tilde{X} = [Y_0]$$

où

$$Y_0 = \left(\left[\sum_j a_{i,j} \times_\Omega x_j \right]_\omega \right) = \left[\frac{1}{\omega} A X \right]$$

car, pour tout i , on a

$$\left\{ \sum_j a_{i,j} \times_\Omega x_j \right\}_\omega - \sum_j \{a_{i,j} \times_\Omega x_j\}_\omega =_\omega 0$$

(la partie entière d'une matrice s'entend comme la matrice des parties entières de ses coefficients).

Soit $\hat{\omega}$, \hat{A} et \hat{X} des représentants respectifs de ω , A et X dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ et $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$. Notons que, puisque les coefficients $\tilde{a}_{i,j}$ sont dans $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$, les coefficients de la matrice A sont limités et les coefficients de \hat{A} sont bornés. Alors, en identifiant les matrices de suites aux suites de matrices, on obtient un représentant \hat{Y}_0 de Y_0 en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{Y}_0(n) = \left[\frac{1}{\hat{\omega}(n)} \hat{A}(n) \hat{X}(n) \right].$$

En appelant g_n l'AQA définie par

$$g_n(V) = \left[\frac{1}{\hat{\omega}(n)} \hat{A}(n) V \right],$$

on achève la partie « seulement si » de la preuve.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite bornée de matrices $M(n)$ telles que, pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f([V]) = \left[\left[\left[\frac{1}{\alpha(n)} M(n) V(n) \right] \right]_{n \in \mathbb{N}} \right].$$

Alors, en plongeant \mathbb{Z}_Ω dans \mathbb{Q}_Ω et en utilisant les propriétés de la relation \sim ,

$$f([V]) = \left[\left[\frac{1}{\omega} [M] [V] \right] \right]$$

car, par hypothèse, $[\alpha] = \omega$. L'équation (1) permet alors de conclure que

$$f([V]) = [[M]] [V]$$

ce qui prouve que f est affine. \square

Il est nécessaire maintenant de préciser comment nous passons des applications affines euclidiennes aux Ω -AQA. Nous nous donnons deux entiers infiniment grands, la résolution r et l'échelle ω , qui vont assurer la transition, via la droite d'Hartong-Reeb, entre le continu et le discret. La résolution permet le passage de l'espace euclidien \mathbb{R}^d à l'espace discret \mathbb{Z}^d tandis que l'échelle permet la quantification des coefficients de l'application affine f . Si les infiniment grands $r = ({}^n r)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\omega = ({}^n \omega)_{n \in \mathbb{N}}$ sont proportionnels, alors on évite le problème du passage de $\widetilde{\mathcal{HR}}_r$ à $\widetilde{\mathcal{HR}}_\omega$ puisqu'alors les deux espaces sont identiques (les relations d'équivalences $=_r$ et $=_\omega$ sont égales bien qu'elles soient définies de façons différentes). Ainsi, étant donnée une application affine euclidienne $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de matrice $M = (m_{i,j})$, nous définissons une suite d'applications

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{{}^n \zeta} & \mathbb{Q}^d & \xrightarrow{{}^n \psi_r} & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{{}^n g} & \mathbb{Z}^d & \xrightarrow{{}^n \phi_r} & \mathbb{Q}^d \\ x & \longmapsto & {}^n x & \longmapsto & [{}^n r \cdot {}^n x] & \longmapsto & {}^n z & \longmapsto & {}^n y = \frac{{}^n z}{{}^n r} \end{array}$$

où ${}^n \zeta$ est la n^e «projection» d'une méthode d'approximation de vecteurs à coordonnées réelles par une suite de vecteurs à coordonnées rationnelles via, par exemple, des développements en fractions continues, ou des développements dans une base de numération, ${}^n \psi_r$ et ${}^n \phi_r$ sont les n^es «projections» des applications ψ_r et ϕ_r définies en (3) et (2) et ${}^n g$ est l'AQA dont le dénominateur est ${}^n \omega$ et la matrice est $({}^n a_{i,j})_{i,j}$ avec ${}^n a_{i,j} = {}^n \psi_\omega({}^n m_{i,j})$ et ${}^n m_{i,j} = {}^n \zeta(m_{i,j})$.

On vérifie alors qu'avec ce schéma, la suite d'applications ${}^n \phi_r \circ {}^n g \circ {}^n \psi_r \circ {}^n \zeta$ converge uniformément vers f sur toute partie compacte de \mathbb{R}^d .

Proposition 1. *Soit f une application affine de \mathbb{R}^d et $K \subset \mathbb{R}^d$, un compact. Alors, il existe des constantes réelles k_1, k_2, k_3 telles que, pour tout $x \in K$ et avec les notations définies ci-dessus, on a*

$$\|f(x) - {}^n y\|_\infty \leq k_1 \varepsilon(n) + \frac{k_2}{{}^n r} + \frac{k_3}{{}^n \omega}.$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$.

Dans cette proposition, ε est lié à la méthode utilisée pour approcher les réels par des suites de rationnels, k_1 dépend de f et de K , k_2 dépend uniquement de f et k_3 uniquement de K .

Démonstration. Quitte à utiliser des coordonnées homogènes, on suppose que f est linéaire.

On décompose l'erreur $f(x) - {}^n y$ de la façon suivante,

$$f(x) - {}^n y = \left(f(x) - f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right) \right) + \left(f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right) - {}^n y \right).$$

En utilisant une méthode d'approximation telle que les fractions continues, on a, pour la première partie de la décomposition ci-dessus

$$\|f(x) - f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right)\|_\infty = \|f(x - \frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r})\|_\infty \leq \|M\|_\infty \varepsilon(n)$$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$.

Pour le second terme de la décomposition, nous avons

$$\|f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right) - {}^n y\|_\infty = \left\| \frac{1}{{}^n r} f(\{ \lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor \}) \right\|_\infty \leq \|M\|_\infty \frac{1}{{}^n r}$$

Enfin, en notant ${}^n f$ l'application affine ayant pour matrice $({}^n m_{i,j})$ et ${}^n h$ l'application affine ayant pour matrice $(\frac{{}^n a_{i,j}}{{}^n \omega})$, le calcul du dernier terme de la décomposition donne

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right) - {}^n y \\ &= \frac{1}{{}^n r} \left(f(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) - {}^n g(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) \right) \\ &= \frac{1}{{}^n r} \left((f - {}^n h)(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) + {}^n h(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) - g(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) \right) \\ &= \frac{1}{{}^n r} (f - {}^n f)(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) \\ &\quad + \frac{1}{{}^n r \cdot {}^n \omega} \left(\{ \frac{{}^n a_{i,j}}{{}^n \omega} \} \right)_{i,j} \lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor \\ &\quad + \frac{1}{{}^n r} \{ {}^n h(\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor) \} \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la définition de ${}^n g$ comme AQA de dénominateur ${}^n \omega$ et de matrice $({}^n \psi_{\omega}({}^n m_{i,j}))_{i,j}$.

On en déduit que

$$\|f\left(\frac{\lfloor {}^n r \cdot {}^n x \rfloor}{{}^n r}\right) - {}^n y\|_\infty \leq 2\varepsilon(n) \|{}^n x\|_1 + \frac{2}{{}^n \omega} \|{}^n x\|_1 + \frac{1}{{}^n r}.$$

Finalement, l'erreur $\|f(x) - {}^n y\|_\infty$ est telle que

$$\begin{aligned} \|f(x) - {}^n y\|_\infty &\leq (\|M\|_\infty + 2\|x\|_1) \varepsilon(n) \\ &\quad + (\|M\|_\infty + 1) \frac{1}{{}^n r} + \|x\|_1 \frac{2}{{}^n \omega}. \end{aligned}$$

La proposition 1 s'en déduit immédiatement. \square

Pour terminer cette introduction aux Ω -AQA, nous voulons donner un exemple de propriété vérifiée par une application affine et qui n'est pas vérifiée par la suite d'AQA qui la représente dans notre modèle, à quelque rang que ce soit.

Considérons la similitude de centre 0, de rapport 1/2 et d'angle $\pi/3$. Le point O est l'unique point fixe de s . Nous allons voir que, quelque soit le choix de ω , cette propriété n'est vérifiée par aucune des AQA qui «représentent» s . En effet, soit ${}^n g$ l'AQA qui représente s au rang n . Alors l'image

du point $P(x, y)$ de \mathbb{Z}^2 par ${}^n g$ est le point $P'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \left\lfloor \frac{{}^n a_{1,1}x + {}^n a_{1,2}y}{{}^n \omega} \right\rfloor \\ y' = \left\lfloor \frac{{}^n a_{2,1}x + {}^n a_{2,2}y}{{}^n \omega} \right\rfloor \end{cases}$$

où les coefficients ${}^n a_{i,j}$ sont tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{{}^n a_{1,1}}{{}^n \omega} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{{}^n a_{2,2}}{{}^n \omega} = \frac{1}{4}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{{}^n a_{2,1}}{{}^n \omega} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{{}^n a_{1,2}}{{}^n \omega} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4.$$

Il est clair, qu'à partir d'un certain rang, le point $P_0(0, -1)$ sera un point fixe de l'AQA ${}^n g$. On peut montrer grâce à une propriété des AQA établie par l'une des auteures [JDC14, Th. 3] qu'il n'y a pas d'autre point fixe. Ainsi, toutes les AQA qui représentent s ont, à partir d'un certain rang, exactement deux points fixes, et cela, quelque soit le choix du Ω -entier infiniment grand ω .

Cependant, il faut remarquer que le point $P_0(0, -1)$ se rapproche de l'origine quand la résolution tend vers l'infini. Autrement dit, dans notre modèle, la distance de Hausdorff entre l'ensemble des points fixes de f et l'ensemble des points fixes de l'AQA ${}^n g$ tend vers 0.

6. Conclusion

Dans ce papier, nous avons représenté un modèle de discrétisation de l'action d'une application affine f sur l'espace euclidien \mathbb{R}^d . Quitte à omettre quelques aspects techniques, on peut dire que ce modèle met en correspondance le couple (\mathbb{R}^d, f) avec une suite de couples (\mathbb{Z}^d, g_n) dans lesquels l'espace discret \mathbb{Z}^d est associé à une résolution de plus en plus grande et l'application quasi-affine g_n correspond à une quantification de plus en plus fine de f . La correspondance se fait via le choix de deux Ω -entiers infiniment grands qui permettent de plonger les réels dans la droite d'Harthong-Reeb, espace des suites d'entiers dominées par un Ω -entier donné. Ce modèle nous amène à nous intéresser aux suites d'applications quasi-affines et nous avons donné dans la section 5 quelques résultats préliminaires à leur propos. Nous allons poursuivre nos efforts de recherche dans ce sens tout en commençant la validation formelle du modèle via l'assistant de preuves Coq [Coq].

Références

- [Coq] COQ DEVELOPMENT TEAM : The Coq Proof Assistant Reference Manual. LogiCal Project. <http://coq.inria.fr>.
- [CWF*12] CHOLLET A., WALLET G., FUCHS L., ANDRES E., LARGETEAU-SKAPIN G. : Foundational aspects of multiscale digitization. Theoretical Computer Science. Vol. 466 (2012), 2–19.
- [Die92] DIENER M. : Application du calcul de Harthong-Reeb aux routines graphiques. In Le Labyrinthe du Continu (1992), Salanskis J.-M., Sinaceurs H., (Eds.), Springer, pp. 424–435.
- [GTL89] GIRARD J.-Y., TAYLOR P., LAFONT Y. : Proofs and Types. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1989.
- [Har89] HARTHONG J. : Une théorie du continu. In Les mathématiques non standard (1989), Barreau H., Harthong J., (Eds.), Éditions du CNRS, pp. 307–329.
- [JDC14] JACOB-DA COL M.-A. : New results about Quasi-Affine Transformations. Research report, Laboratoire ICube, équipe MIV, octobre 2014.
- [JDCT09] JACOB-DA COL M.-A., TELLIER P. : Quasi-linear transformations and discrete tilings. Theoretical Computer Science. Vol. 410, Num. 21 (2009), 2126–2134.
- [Lau83] LAUGWITZ D. : Ω -calculus as a generalization of field extension : An alternative approach to nonstandard analysis. In Nonstandard Analysis - Recent developments, Hurd A., (Ed.), Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1983, pp. 144–155.
- [Nel77] NELSON E. : Internal set theory : A new approach to nonstandard analysis. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 83, Num. 6 (November 1977), 1165–1198.
- [Rev91] REVEILLÈS J.-P. : Géométrie discrète, Calcul en nombres entiers et algorithmique. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991.
- [Rob74] ROBINSON A. : Non-standard analysis. American Elsevier, New York, 1974. 2nd ed.
- [RR96] REVEILLÈS J.-P., RICHARD D. : Back and forth between continuous and discrete for the working computer scientist. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Mathematics and Informatic. Vol. 16, Num. 1-4 (1996), 89–152.
- [SU06] SØRENSEN M. H., URZYCZYN P. : Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, vol. 149 de Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

Topological alterations of 3D digital images under rigid transformations

K. Pluta¹, Y. Kenmochi¹, N. Passat², H. Talbot¹, P. Romon³

¹ Université Paris-Est, LIGM, Paris

² Université de Reims, CReSTIC, Reims

³ Université Paris-Est, LAMA, Paris

Résumé

Rigid transformations in \mathbb{R}^n are known to preserve the shape, and are often applied to digital images. However, digitized rigid transformations, defined as digital functions from \mathbb{Z}^n to \mathbb{Z}^n do not preserve shapes in general; indeed, they are almost never bijective and thus alter the topology. In order to understand the causes of such topological alterations, we first study the possible loss of voxel information and modification of voxel adjacencies induced by applications of digitized rigid transformations to 3D digital images. We then show that even very simple structured images such as digital half-spaces may not preserve their topology under these transformations. This signifies that a simple extension of the two-dimensional solution for topology preservation cannot be made in three dimensions.

Mots clé : digital topology, rigid transformation, digital image.

1. Introduction

Three-dimensional digital images can be viewed as finite subsets of \mathbb{Z}^3 . In the context of applications of rigid transformations to digital images, they are defined as digital functions $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$. In contrast with rigid transformations defined as $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, their digitized analogues do not preserve distances and angles in general; indeed, they are almost never bijective and thus alter both geometry and topology.

Recently, 2D discrete rigid transformations were studied by Ngo *et al.* [NKPT13], with their impact on topological properties [NKPT14], which finally led to establishing sufficient conditions for topology preservation under digitized rigid transformations [NPKT14]. The purpose of this study is to investigate whether the conditions for topology preservation established by Ngo *et al.* [NPKT14] in the case of two dimensions can be extended to three dimensions. In particular, we study how fundamental problems induced by digitization differ between two- and three-dimensional transformations. In order to answer these questions, we will identify the following three main problems: the possible loss of information during digitized rigid transformations, the alteration of distances between a pair of adjacent points, and their impact on topological properties. Our study will show that the main two problems, which are common in both dimensions, have different impacts on topological properties, and the link

between two- and three-dimensional conditions for topology preservation under digitized rigid transformations cannot be straightforwardly established. Indeed, our main result shows that some simple topological properties of images cannot be preserved under digitized rigid transformations even for “planar” surfaces, which have one of the simplest geometrical shapes.

2. Rigid transformations

Rigid transformations in \mathbb{R}^3 are bijective isometry maps [GS07] which preserve distances and angles between every pair and triple of points respectively. The set of rigid transformations includes rotations, translations, reflections, and combinations of these. Hereafter, only rotations, translations and their compositions will be considered. Reflections are excluded due to application demand. It may be noted that reflections are easily obtained by composing a \mathbb{Z}^n -preserving reflection with a rotation; hence the same issues hold for reflections. In \mathbb{R}^3 , a rigid transformation is defined as a function:

$$\begin{cases} \mathcal{U} : \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \end{cases} \quad (1)$$

where \mathbf{t} denotes a translation vector and \mathbf{R} is a rotation matrix. Note also that the inverse function $\mathcal{T} = \mathcal{U}^{-1}$ is also a rigid transformation.

According to (1), in general, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}^3) \not\subseteq \mathbb{Z}^3$. Therefore, rigid transformations defined as maps $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ have to be treated

with care. The most common solution is to apply rigid transformations together with digitization operator $\mathcal{D} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$. Then digitized rigid transformations are defined as:

$$U = \mathcal{D} \circ \mathcal{U}|_{\mathbb{Z}^3} \quad (2)$$

and

$$T = \mathcal{D} \circ \mathcal{T}|_{\mathbb{Z}^3} = \mathcal{D} \circ (\mathcal{U}^{-1})|_{\mathbb{Z}^3} \quad (3)$$

which are the digitized versions of \mathcal{U} and \mathcal{T} , respectively. Due to behavior of \mathcal{D} that maps $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$, digitized rigid transformations are not bijective in general.

3. Voxel statuses

According to (2), it may happen that none, or more than one point of finite subset of \mathbb{Z}^3 will enter into the same voxel after transformation of image. To analyze such situations, the status of voxels after digitized rigid transformation can be defined as follows. Let us consider the voxel whose center is $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$. For a given digitized rigid transformation U , the set of points whose transformation is \mathbf{y} is given by $M(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \mid U(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$. If we consider $|M(\mathbf{y})|$ as the status of voxel whose center is \mathbf{y} , it can be proven that only five statuses are possible, namely $|M(\mathbf{y})| \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. This indicates that digitized rigid transformations can induce a large loss of information; in addition, five voxel statuses exist in 3D, instead of three statuses in 2D, where $|M(\mathbf{y})| \in \{0, 1, 2\}$ [NR05]. Moreover, two or more voxels such that their status is zero can be *6-adjacent*, while the analogous case in 2D, namely *4-adjacent* pixels of $|M(\mathbf{y})| = 0$, is impossible [NR05].

4. Distance alterations

In general, digitized rigid transformations do not preserve distances in both 2D and 3D. The most critical case for 2D is an *8-adjacent* between which the Euclidean distance $d_e = \sqrt{2}$; after digitized transformations, it can become $\sqrt{5}$ at most (in [NKPT14] authors incorrectly gave 2 as a maximum). In 3D, both *18-* and *26-adjacencies* provide critical cases – the set of possible distances between an adjacent pair of points contains relatively higher values, such as $\sqrt{6}$ and 3, respectively. More precisely, considering two points \mathbf{p}, \mathbf{q} then, we have

$$d_e(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1 \Rightarrow d_e(\mathbf{p}', \mathbf{q}') \in \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$$

$$d_e(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{2} \Rightarrow d_e(\mathbf{p}', \mathbf{q}') \in \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$$

$$d_e(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{3} \Rightarrow d_e(\mathbf{p}', \mathbf{q}') \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, 3\}$$

where $\mathbf{p}' = U(\mathbf{p})$ and $\mathbf{q}' = U(\mathbf{q})$. Such modifications of distances induced by digitized transformations are potential causes of topological issues like merging or splitting of connected components.

5. Topological issues

The main result of this study shows differences between digitized rigid transformation defined in \mathbb{Z}^2 and \mathbb{Z}^3 , that implies that the solution for topology preservation under digitized rigid transformations established by Ngo *et al.*

[NPKT14] cannot be simply extended from 2D to 3D. Indeed, as noted by Figure 1 which presents \mathbf{x} and its *6-neighborhood* under rigid transformation, alterations of topological properties are possible even for simple digital shapes, such as discrete planes [KBSS08]. This makes difficult to extend the definition of regular images, which allows, in 2D, to preserve their topology [NPKT14]. Our result adds to the set of known problems in digital topology, which are difficult to overcome when increasing the space dimension from two to three, such as homotopy thinning [PCB08] and digitization [SLS07].

6. Conclusion

In this study, the first step to understand digitized rigid transformations in \mathbb{Z}^3 was taken, and the essential topological problems and their causes were highlighted. Indeed, in order to propose efficient methods for topology repair after digitized rigid transformations, it is crucial to understand how the adjacency structure of digital images changes under digitized rigid transformations first, in particular, the relations between these changes and the statuses of voxels or between the induced distances. It has to be mentioned that, due to the lack of combinatorial and mathematical tools, such as those developed for 2D digitized transformations [NR05], [NKPT13], a future study should start with developing an extension of these tools to 3D. It is also important to mention that preservation of geometrical properties of digital images under digitized rigid transformations is still an open problem, which deserves a better understanding in both 2D and 3D.

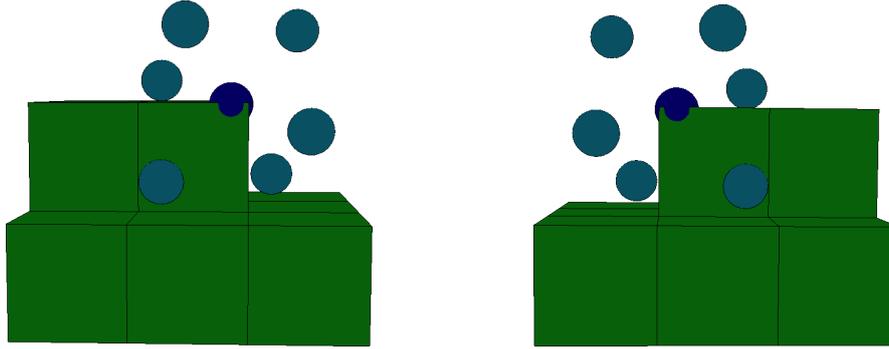


Figure 1: In green, a $3 \times 3 \times 3$ part of initial image. The spheres represent selected points of transformed space after application of T . The darkened blue sphere corresponds to the point which was mapped onto border voxel. Bright spheres correspond to its 6-adjacent neighbors. Even if the dark blue point is a part of the digital plane after a transformation, its neighboring points are not.

Références

- [GS07] GALARZA A. I. R., SEADE J. : *Introduction to Classical Geometries*. Springer, 2007.
- [KBSS08] KENMOCHI Y., BUZER L., SUGIMOTO A., SHIMIZU I. : Discrete plane segmentation and estimation from a point cloud using local geometric patterns. *International Journal of Automation and Computing*. Vol. 5, Num. 3 (2008), 246–256.
- [NKPT13] NGO P., KENMOCHI Y., PASSAT N., TALBOT H. : Combinatorial structure of rigid transformations in 2D digital images. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 117, Num. 4 (2013), 393–408.
- [NKPT14] NGO P., KENMOCHI Y., PASSAT N., TALBOT H. : Topology-preserving conditions for 2D digital images under rigid transformations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 49, Num. 2 (2014), 418–433.
- [NPKT14] NGO P., PASSAT N., KENMOCHI Y., TALBOT H. : Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 23, Num. 2 (2014), 885–897.
- [NR05] NOUVEL B., RÉMILA E. : Configurations induced by discrete rotations : Periodicity and quasi-periodicity properties. *Discrete Applied Mathematics*. Vol. 147, Num. 2–3 (2005), 325–343.
- [PCB08] PASSAT N., COUPRIE M., BERTRAND G. : Minimal simple pairs in the 3-D cubic grid. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 32, Num. 3 (2008), 239–249.
- [SLS07] STELLDINGER P., LATECKI L. J., SIQUEIRA M. : Topological equivalence between a 3D object and the reconstruction of its digital image. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 29, Num. 1 (2007), 126–140.

Extraction d'information homologique des objets discrets s'appuyant sur des graphes orientés

Aldo Gonzalez-Lorenzo^{1,2}, Alexandra Bac¹, Jean-Luc Mari¹ et Pedro Real²

¹Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296 (France)

²Université de Séville, Institut de Mathématiques IMUS (Espagne)

Résumé

Tout objet discret n -dimensionnel peut être transformé en complexe cubique, dont on peut étudier les groupes d'homologie pour mieux comprendre l'objet original. Une approche classique consiste à calculer la Forme Normale de Smith de matrices encodant le complexe cubique. Un certain nombre de travaux développent des méthodes permettant de réduire la taille de ces matrices.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche, initialement fondée sur la théorie discrète de Morse, calculant l'information homologique (nombres de Betti et cycles représentatifs) sans utiliser la Forme Normale de Smith. Notre approche s'applique en dimension quelconque et peut être utilisée pour n'importe quel type de complexe cellulaire régulier.

n -dimensional discrete objects can be interpreted as cubical complexes which are suitable for the study of their homology groups in order to understand the original discrete object. The classic approach consists in computing the Normal Smith Form of some matrices that encode the cubical complex. Further approaches deal mainly with a pre-processing of these matrices in order to reduce their size.

In this paper we propose a new approach, initially based on Discrete Morse Theory, which computes some homological information (Betti numbers and representative cycles) without calculating the Normal Smith Form. It works on any dimension, and it can also be applied to any kind of regular cell complex.

Mots clé : objet discret, complexe cubique, homologie, théorie de l'homologie effective, théorie discrète de Morse.

1. Introduction

L'homologie s'est révélée comme un très bon outil pour la classification et la compréhension des objets discrets, notamment quand ils ont plus de trois dimensions. Elle fournit une classe de descripteurs qui synthétisent la structure basique de la forme considérée.

L'homologie formalise la notion de « trou » dans un objet. On peut classer les « trous » par leur dimension : les 0-trous sont les composantes connexes ; les 1-trous, les tunnels et les 2-trous, les cavités. Le calcul de l'information homologique a pour but, entre autres, de déterminer le nombre de ces trous (nombre de Betti) et un représentant de chacun (cycle représentatif ou générateur d'homologie). Cela reste intuitif jusqu'à trois dimensions, mais en dimension quatre, on peut trouver des coefficients de torsion dans les groupes d'homologie, ce qui n'a pas une interprétation intuitive mais permet cependant une classification des objets. Le calcul de l'homologie nécessite le choix préalable d'un anneau de co-

efficients ; afin de nous placer dans le cas le plus général et de pouvoir obtenir ces coefficients de torsion, nous avons choisi l'anneau des entiers.

Ce travail s'appuie sur deux approches antérieures : la théorie de l'homologie effective [Ser92] et la théorie discrète de Morse [For02]. La première explicite le lien entre l'objet original et ses groupes d'homologie (mais s'avère d'une complexité élevée, puisque basée sur des matrices typiquement géantes de taille $\mathcal{O}(n^2)$ où n est le nombre de cellules du complexe). La deuxième approche est en revanche très simple et de complexité beaucoup plus faible, mais ne permet pas toujours de calculer l'homologie exacte.

Dans cet article, nous proposons une approche qui combine ces deux théories, en en conservant les avantages tout en dépassant leurs limitations respectives. Nous construisons un objet qui généralise le *champ de vecteurs gradient discret* (outil principal de la théorie discrète de Morse) en autorisant les cycles, ce qui permet de calculer l'homologie exacte (et pas seulement une approximation). Tenant compte de ces cycles, on obtient la réduction (outil principal de la théorie de l'homologie effective) reliant le complexe cubique et ses

groupes d'homologie. Cette réduction donne les générateurs de l'homologie.

Cette méthode s'applique en dimension quelconque et à n'importe quel type de complexe cellulaire régulier.

Pour plus de détails sur l'état de l'art et le contexte tant de la théorie des complexes cellulaires que de l'homologie, le lecteur pourra se reporter à notre article [GLBMR].

2. Préliminaires

Dans cette section nous introduisons les concepts nécessaires.

Un *objet discret* de dimension n est un ensemble de cubes n -dimensionnels dont le centre a des coordonnées entières.

Les complexes cubiques sont présentés de manière détaillée dans [KMM04]. Un *complexe cubique* est un type de complexe cellulaire dont les cellules sont des points (dimension 0), des arêtes (dimension 1), des carrés (dimension 2), des cubes (dimension 3), etc. Le *bord* d'une cellule de dimension q (q -cellule) est l'ensemble de $(q - 1)$ -cellules de sa frontière.

Un complexe cubique peut être défini par son *diagramme de Hasse*. C'est un graphe orienté où les sommets sont les cellules du complexe, et les arcs vont d'une cellule vers les cellules de son bord.

La façon la plus simple de définir un complexe cubique à partir d'un objet discret consiste à remplacer chaque cube de l'objet par une n -cellule avec ses sous-cellules de dimension inférieure. Une construction duale consiste à remplacer chaque cube par un point (0-cellule) et ajouter des cellules de dimension supérieure selon la relation d'adjacence entre les cubes. Cette dernière construction utilise moins de cellules, ce qui rend les méthodes de calcul de l'homologie plus performantes. La figure 1 montre ces deux constructions à partir d'un même objet discret.

Un *complexe de chaînes* (C_*, d_*) est une séquence de groupes C_0, C_1, \dots (appelés *groupes de chaînes*) et d'homomorphismes $d_1 : C_1 \rightarrow C_0, d_2 : C_2 \rightarrow C_1, \dots$ (appelés *opérateurs différentiels* ou *de bord*) telle que $d_{q-1}d_q = 0, \forall q > 0$. On peut construire une complexe de chaînes à partir d'un complexe cubique : les groupes de chaînes sont les groupes libres engendrés par les cellules de chaque dimension ; l'opérateur de bord sur une cellule donne une combinaison linéaire des cellules de son bord. La formule exacte est explicitée dans [KMM04].

Le q -ème groupe d'homologie du complexe de chaînes (C_*, d_*) est le groupe quotient $H(C)_q = \ker(d_q) / \text{im}(d_{q+1})$. Ce groupe est isomorphe à

$$\mathbb{Z}^{\beta_q} \times \mathbb{Z} / \lambda_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \lambda_2 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} / \lambda_r \mathbb{Z},$$

où chaque λ_i divise λ_{i+1} . β_q est le q -ème *nombre de Betti* et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont appelés *coefficients de torsion*. Rappelons que si le complexe cubique est de dimension 3, il n'y a pas de *coefficients de torsion*.

La théorie de l'homologie effective introduit la notion de *réduction* : étant donné deux complexes de chaînes (C_*, d_*) et (C'_*, d'_*) , une réduction est un triplet d'homomorphismes (h_*, f_*, g_*) tel que :

- $h_q : C_q \rightarrow C'_{q+1}$ pour chaque $q \geq 0$
- $f_q : C_q \rightarrow C'_q$ est un morphisme de chaînes ($fd = d'f$)
- $g_q : C'_q \rightarrow C_q$ est aussi un morphisme de chaînes ($gd' = dg$)
- $gf = 1 - dh - hd$
- $fg = 1_{C'}$
- $hh = hf = hg = 0$

Une réduction est une sorte de simplification d'un complexe de chaînes (le deuxième complexe contient normalement des groupes dont les bases sont plus petites) préservant l'information homologique et fournissant un lien entre le complexe initial et le complexe simplifié. Quand le deuxième complexe est suffisamment simple pour ne plus contenir que les groupes d'homologie, il fournit alors les générateurs d'homologie du complexe initial.

Dans la suite de cette partie, nous présentons brièvement les notions de base de la théorie discrète de Morse. Pour une introduction plus rigoureuse, le lecteur pourra consulter [For02].

Un *champ de vecteurs discret* (*discrete vector field, DVF*) sur un complexe cubique est un couplage sur son diagramme de Hasse, c'est-à-dire un sous-graphe de ce dernier dont aucune des arêtes ne partage un même sommet. Étant donné un champ de vecteurs discret \mathcal{V} , le *graphe de Morse* est construit à partir du diagramme de Hasse, en renversant les flèches du sous-graphe \mathcal{V} . Les flèches issues de \mathcal{V} sont alors appelées *intégrales*, les autres, *flèches différentielles*. Un *V-chemin* est un chemin sur le graphe de Morse qui alterne des flèches intégrales et différentielles. Ainsi, un champ de vecteurs discret qui ne contient pas de V-chemins fermés est un *champ de vecteurs gradient discret* (*discrete gradient vector field, DGVF*). Une *cellule critique* est une cellule non couplée dans le champ de vecteurs gradient discret.

L'un des résultats fondamentaux de la théorie discrète de Morse est que le nombre de q -cellules critiques est supérieur ou égal au q -ème nombre de Betti. Quand les nombres de Betti coïncident avec le nombre de cellules critiques, on dit que le champ de vecteurs gradient discret est *parfait*. Malheureusement, pour certains complexes cellulaires, un tel DGVF n'existe pas ; on appelle alors *optimal* un DGVF contenant un nombre minimal de cellules critiques (qui peut donc être supérieur au nombre de Betti).

À partir d'un champ de vecteurs gradient discret, on peut calculer une réduction associée. On définit tout d'abord l'opérateur linéaire suivant :

$$V(\sigma) = \begin{cases} \langle d(\tau), \sigma \rangle \cdot \tau, & (\sigma, \tau) \text{ est dans le couplage} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\langle d(\tau), \sigma \rangle$ est le coefficient de la cellule σ dans la chaîne $d(\tau)$. On pose alors :

$$\begin{aligned} h(\sigma) &= \sum_{k \geq 0} V(1 - dV)^k(\sigma) = V(\sigma) + h(1 - dV)(\sigma) \\ f(\sigma) &= (1 - dh - hd)(\sigma) = f(1 - dV)(\sigma) \\ g(\sigma) &= \sigma \end{aligned} \tag{1}$$

3. Notre approche

Notre objectif est de dépasser les limitations de la théorie discrète de Morse en obtenant l'information homologique



Figure 1: Un objet discret de dimension 3 et ses deux complexes cubiques associés. Notons que dans le deuxième il y a deux composantes connexes.

exacte à partir d'un champ de vecteurs gradient discret ; c'est une approche purement combinatoire (par opposition aux approches algébriques) qui, de plus, encode une réduction sous forme de graphe. Cependant, il a été prouvé que déterminer un DGVF optimal dans le cas général est un problème NP [LLT03] et que pour certains complexes, il n'existe pas de DGVF parfait (par exemple, la maison de Bing et le « dunce hat », voir [AFTV12]). Pour résoudre ce problème, notre approche repose sur l'enrichissement des DGVF par des cycles (soigneusement choisis et contrôlés). Nous appellerons ce type de champ de vecteurs discret un *champ de vecteurs discret homologique (homological discrete vector field, HDVF)*.

Sans entrer dans les détails, notre approche est la suivante : étant donné un objet discret, nous construisons son complexe cubique associé et établissons un premier champ de vecteurs gradient discret quelconque. Puis, notre algorithme est basé sur la correction itérative de ce graphe. Chaque correction élimine deux cellules critiques en renversant un V-chemin entre elles, ce qui peut créer des V-chemins fermés. On peut à tout moment calculer la réduction associée au champ de vecteurs discret homologique en utilisant les formules récursives (1).

Obtenir l'image par h ou f d'une cellule σ par cette formule récursive revient à faire un parcours du graphe de Morse à partir de σ . Puisque notre HDVF peut contenir des cycles, il est nécessaire d'arrêter le parcours au bon moment. Nous introduisons la notion de *sommet de confluence* (sommet où deux cycles orientés se rejoignent) pour résoudre ce problème. Notre parcours s'arrête donc aux sommets de confluence, produisant un système d'équations linéaires (illustré dans l'exemple suivant), que nous résolvons pour obtenir la valeur de h ou f en σ .

À titre d'exemple, considérons le complexe de la figure 2. On peut noter qu'il y a trois V-chemins (en orange) entre les deux cellules critiques de dimension 1 et 2.

Lorsqu'on calcule fd sur la 2-cellule critique, on retrouve la 1-cellule critique ; s'il n'y avait qu'un V-chemin entre elles, on pourrait donc les annuler (comme en théorie discrète de Morse), c'est-à-dire, renverser ce V-chemin afin qu'elles ne soient plus critiques. Cependant, dans cet exemple, il y a trois V-chemins entre elles. Il est donc néces-

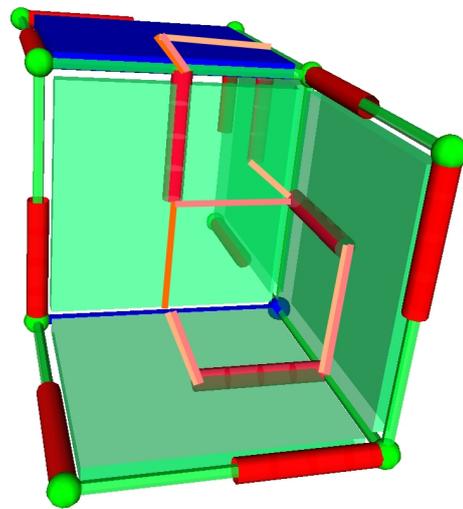


Figure 2: Champ de vecteurs gradient discret (en rouge) sur un complexe cubique. Il y a trois cellules critiques en bleu, une de chaque dimension.

saire d'en choisir un (ici, nous prenons le plus court), ce qui crée deux cycles orientés.

Si l'on souhaite, à partir de ce graphe, calculer l'opérateur h (ou f) on doit d'abord déterminer sa valeur sur le sommet de confluence (nommé c , marqué en violet dans la figure 3). On obtient alors une équation du type :

$$h(c) = 2 \cdot h(c) + x \Rightarrow h(c) = -x \quad (2)$$

où x est la chaîne obtenue durant le parcours (non explicitée ici). Par simple résolution de cette équation, on obtient alors la valeur de $h(c)$, qu'on utilise ensuite pour le calcul de h en toute cellule σ (le parcours depuis σ est arrêté au sommet de confluence c et la valeur de $h(c)$ est alors substituée dans la formule récursive).

Dans le cas général on obtient une équation pour chaque sommet de confluence, produisant ainsi un système d'équations linéaires. Une fois ce processus de correction terminé, le nombre de cellules critiques dans chaque dimension coïncide avec les nombres de Betti s'il n'y a pas de coefficients

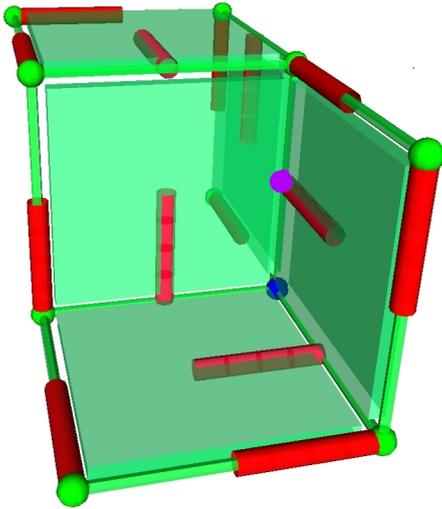


Figure 3: Le champ de vecteurs discret (homologique) après le renversement du V-chemin. Le sommet de confluence est marqué par un point violet.

de torsion. Le cas où il y a des coefficients de torsion requiert des explications plus précises, mais n'apporte pas de difficultés supplémentaires. Enfin, on peut obtenir les générateurs d'homologie en appliquant $f = 1 - dh - hd$ sur les cellules critiques.

Les figures 4 et 5 montrent deux exemples classiques où nous calculons un champ de vecteurs discret homologique. Le complexe (simplicial) pour le « dunce hat » a été obtenu de [Hac]. Notre algorithme a été implémenté en C++ avec les bibliothèques DGtal [DGt] et Eigen [Eig].

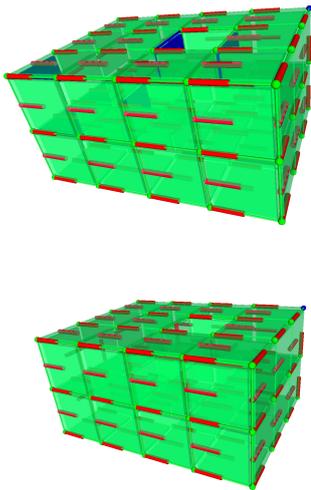


Figure 4: Haut : un DGVF sur la maison de Bing. Bas : le HDVF après la correction du DGVF précédent. Il y a une seule cellule critique (en bleu).

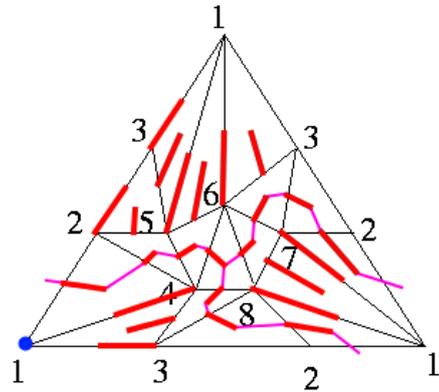
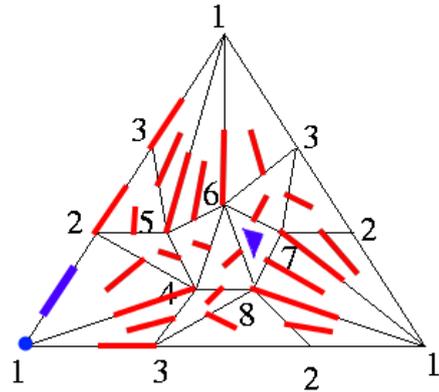


Figure 5: Haut : DGVF sur le « dunce hat » avec trois cellules critiques. Bas : le HDVF après la correction du DGVF précédent. L'unique cellule critique est 1. Les deux cycles orientés du graphe de Morse sont affichés en violet.

4. Conclusion

Nous présentons une généralisation du champ de vecteurs gradient discret pour laquelle nous introduisons un algorithme permettant d'obtenir les nombres de Betti ainsi que des générateurs d'homologie. Notre résultat n'est pas seulement théorique, mais une méthode efficace de calcul de l'information homologique. Dans les deux exemples bien connus de la maison de Bing et du « dunce hat », notre algorithme aboutit à un nombre correct de cellules critiques dans chaque dimension (correspondant aux nombres de Betti).

Références

- [AFTV12] AYALA R., FERNÁNDEZ-TERNERO D., VILCHES J. A. : Perfect discrete Morse functions on 2-complexes. *Pattern Recogn. Lett.*. Vol. 33, Num. 11 (août 2012), 1495–1500.
- [DGt] DGtal : Digital geometry tools and algorithms library. <http://dgtal.org>.
- [Eig] Eigen. <http://eigen.tuxfamily.org>.
- [For02] FORMAN R. : A user's guide to discrete Morse theory. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*. Vol. 48 (2002), B48c.
- [GLBMR] GONZALEZ-LORENZO A., BAC A., MARI J.-L., REAL P. : Computing homological information based on directed graphs within discrete objects.
- [Hac] HACHIMORI M. : Simplicial complex library. http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/index_eng.html.
- [KMM04] KACZYNSKI T., MISCHAIKOW K., MROZEK M. : *Computational Homology*, vol. 157. Springer, 2004, ch. 2, 7, pp. 255–258.
- [LLT03] LEWINER T., LOPES H., TAVARES G. : Toward optimality in discrete Morse theory. *Experimental Mathematics*. Vol. 12, Num. 3 (2003), 271–285.
- [Ser92] SERGERAERT F. : Effective homology, a survey. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/Survey.pdf>, 1992.

Feature extraction on digital surfaces

Jérémy Levallois^{1,2}, David Coeurjolly¹ et Jacques-Olivier Lachaud²

¹Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LIRIS, UMR 5205, F-69621, Villeurbanne, France

²Université de Savoie, CNRS, LAMA, UMR 5127, F-73776, Chambéry, France

Résumé

L'extraction de points caractéristiques à partir d'une forme a beaucoup été étudiée dans la littérature : de nombreux algorithmes traitent des maillages, des nuages de points, ou encore des données discrètes. Nous proposons une nouvelle méthode avec garanties théoriques permettant de les détecter sur des formes discrètes en analysant en espace-échelle des estimateurs récents de courbure ayant de bonnes propriétés mathématiques.

Dans nos précédents travaux [CLL14, LCL14], nous avons proposé des estimateurs de courbures (moyennes, principales, gaussiennes) traitant des formes discrétisées 2D et 3D dont nous avons démontré la convergence asymptotique (sous certaines conditions de la forme), dépendant d'un paramètre : le rayon d'intégration.

Nous proposons ici d'étudier ces estimateurs de courbures avec pour paramètre l'espace-échelle du rayon d'intégration, pour une forme discrète donnée. En analysant le comportement de ces estimateurs, nous pouvons en extraire les caractéristiques (singularités ponctuelles, arêtes, parties linéaires, parties à courbure constante, ...) de la forme discrétisée.

Feature extraction from a shape has been widely studied in the literature : many algorithms are dealing with meshes, point clouds, or discrete data. We propose a new method with theoretical guarantees to detect on digital data by analyzing in scale-space recent digital curvature estimators with good mathematical properties.

In our previous work [CLL14, LCL14], we proposed curvature estimators (mean, principal, Gaussian) dealing with 2D and 3D digitized shapes where we have demonstrated multigrid convergence (under certain conditions on shapes), depending on a parameter : the radius of integration.

We propose to study these curvature estimators with the scale-space of the integration radius as parameter, for a given digital shape. By analyzing behavior of these estimators, we can extract features (singularities, edges, linear parts, constant curvature, ...) of digitized shapes.

Mots clé : points caractéristiques, géométrie discrète, espace-échelle, courbure, convergence asymptotique, estimateur

Notes in Computer Science. Springer International Publishing, septembre 2014.

1. Premiers résultats

(voir figure 1)

Références

- [CLL14] COEURJOLLY D., LACHAUD J.-O., LEVALLOIS J. : Multigrid convergent principal curvature estimators in digital geometry. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 129, Num. 0 (2014).
- [LCL14] LEVALLOIS J., COEURJOLLY D., LACHAUD J.-O. : Parameter-free and multigrid convergent digital curvature estimators. In *18th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2014)*, E. Barucci S. Rinaldi A. F., (Ed.), vol. 8668 de *Lecture*

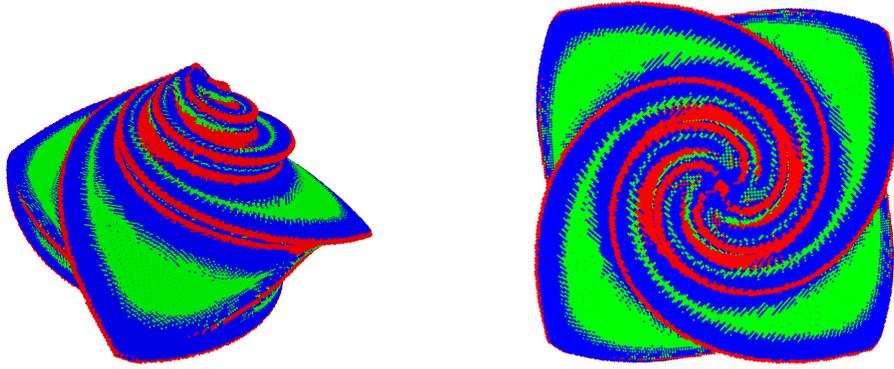


Figure 1: Extraction de points caractéristiques sur une Octa-flower. En vert : les parties linéaires, en bleu : les parties lisses, en rouge : les arêtes.

Re-projection without Reconstruction

Dimitri Pertin^{1,2} and Nicolas Normand¹

¹LUNAM Université, Université de Nantes, IRCCyN UMR CNRS 6597,
Polytech Nantes, rue Christian Pauc BP 50609, 44306 Nantes, France

²Fizians, rue Christian Pauc BP 50609, 44306 Nantes, France

Abstract

Discrete tomography focuses on image representation by its discrete projections, and the related inversion algorithms (or image reconstruction). Our study is based on redundant representations (considering more than just few projections). We propose a new approach to compute further redundancy (i.e. new projections) from a set of existing projections. While this technique relies on the geometric properties of ghosts, which are elements of the 2D image that sum to zero following some projection directions, we show an equivalent method using 1D convolutions, thus avoiding the explicit image reconstruction. This technique has interesting applications in distributed storage systems, where the use of redundancy data is key for system reliability.

Keywords: discrete tomography, redundancy, ghost, convolution, storage.

1. Introduction

The inverse problem in 2D computed tomography (CT) is to reconstruct an image from a set of projections recorded at different angles. A sufficient amount of projections is required in order to inverse the operation, guaranteeing the existence and uniqueness of the solution [Kat78]. The forward operation computes a set of projections of a given 2D image by the Radon transform [Dea07]. The Mojette transform [GN05, Gué09] is a discrete and exact Radon transform. It consists in computing a set of projections from a lattice of pixels along different discrete directions. The values of projection elements are the addition of the pixel values along these directions. While other discrete versions of the Radon transform (e.g. the Finite Radon Transform [MF93]) can compute limited amount of projections, the Mojette transform can be used to compute redundant projections (i.e. beyond the sufficient amount required for the reconstruction process).

Redundant representations are useful in different applications such as reliable transmission [NGPB96] or storage systems [GPN01]. Redundancy is the key to provide reliability in systems that face breakdowns such as packet losses, disk failures or server unavailability. The loss of some projections is counteracted by the redundant information contained in the extra projections computed during the forward transform.

Once projections are computed, we consider that the image is only available by reconstruction. Indeed, in distributed storage systems, the image is only used to compute projections which are afterwards distributed over several storage nodes. When projections are permanently lost, it is necessary to rebuild it to restore the system fault-tolerance. This issue, well-known in the storage community as the *repair problem*, deals with the node repairing after a permanent failure. Furthermore, it could be necessary to improve the system redundancy during its lifetime, by computing further extra projections (i.e. after the forward transform process).

A simple way to compute new projections consists in reconstructing the image from a sufficient amount of projections followed by projecting the pixel values along the desired directions. While simple to design, this technique has several cons. First, the image should not be accessible by anyone but the owner (i.e. not fully reconstructed by a tier). Furthermore, the computation workload should be distributed and not dedicated to the reconstructing tier to avoid computation congestion. Finally, the number of projections transmitted to the reconstructing tier should be minimized. Indeed, the amount of data in large storage clusters continuously increases and the network load for such a task might induce network congestions.

In this paper, we propose a new technique to generate redundant projections from an existing set of projections. After recalling the Mojette transform basics in Section 2, we show that the linear Mojette recon-

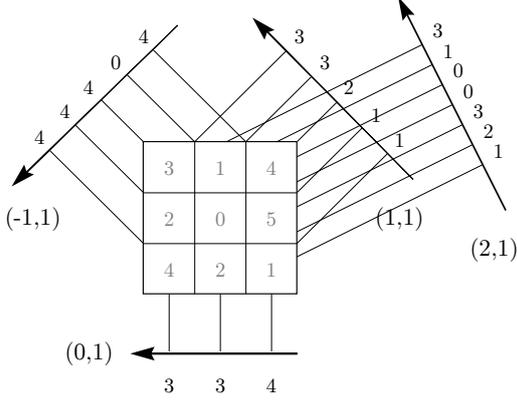


Figure 1: Mojette transform of a 3×3 image for directions (p, q) in the set $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$. Each projection bin is the sum of the pixels centered on a discrete line of equation $b = -kq + lp$. Addition is done modulo 6.

struction can be decomposed into partial reconstructions in Section 3. Particularly, this section shows how each projection contributes independently to the re-projection process and how the explicit reconstruction of the image is avoided. Then, we discuss the storage applications related to this technique in Section 4 before the conclusion.

2. Mojette Transform

The Mojette transform [GN05, Gué09] is a discrete and exact version of the Radon transform. This section presents the Mojette transform, the uniqueness conditions of the reconstruction solution, and the inverse algorithm.

2.1. Forward Mojette Transform

The forward Mojette transform computes a linear set of 1D projections at different angles, from a discrete image $f : (k, l) \mapsto \mathbb{N}$, composed of $P \times Q$ pixels. A projection direction is defined by a couple of co-prime integers (p, q) . Projections are vectors of variable sizes whose elements are called *bins*. A bin in the Mojette transform of f is characterised by its position b in the projection which corresponds to a discrete line of equation $b = -kq + lp$. Its value is the sum of the centered pixels along the line:

$$(M_{(p,q)}f)(b) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} f(k, l) [b = -kq + lp], \quad (1)$$

where, $[\cdot]$ is the Iverson bracket ($[P] = 1$ whenever P is true, 0 otherwise). The number of bins B of a projection depends on the projection direction (p, q) and the lattice size:

$$B(p, q, P, Q) = |p|(Q - 1) + |q|(P - 1) + 1. \quad (2)$$

Figure 1 gives an example of the forward Mojette

transform for a 3×3 integer image. The process transforms the 2D image into a linear set of four projections along the directions of the following set: $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ based on modulo-6 additions. The next section concerns the inverse problem and the reconstruction algorithm.

2.2. Inverse Mojette Transform

The following part describes the existence of a reconstruction solution, its uniqueness, and the inversion algorithm to retrieve the image given a projection set.

2.2.1. Ghosts and Reconstruction Criteria

Katz has shown that for a $P \times Q$ lattice, the reconstruction is possible given a projection set S_I if one of the following criteria is verified [Kat78]:

$$P \leq \sum_{i=0}^{I-1} |p_i| \text{ or } Q \leq \sum_{i=0}^{I-1} |q_i|, \quad (3)$$

where I is the number of projections. For instance, the image in Fig. 1 is reconstructible since $\sum_{i=0}^2 |p_i| = 3$ for the given set, which is not less than the image height. We can also notice that each subset of three projections $\{(p_{j_0}, q_{j_0}), \dots, (p_{j_2}, q_{j_2})\}$ is such that $\sum_{i=0}^2 |p_{j_i}| = 3$. Thus, Fig. 1 depicts a redundant representation of the image, where any projection among four can be omitted for reconstruction.

The criterion for an arbitrary shape is given by the geometric properties of ghosts. Ghosts are elements of the image made of positive and negative values that sum to zero along a set of projection directions. While ghosts influence the image itself, they are invisible in different projection directions. Each projection defined by (p, q) is related to a simple ghost as shown in Fig. 2 (a):

$$G_{\{(p,q)\}} : p \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } p = (0, 0) \\ -1 & \text{if } p = (p, q) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Any image convolved with $G_{\{(p,q)\}}$ has null projection values in the direction (p, q) . As a consequence, a composed ghost $G_{\{(p_i, q_i)\}}$, for the set of projections $\{(p_i, q_i)\}$, is obtained by convolving the simple ghosts G_{p_i, q_i} . Figure 2 gives some examples of simple and composed ghosts. Part (a) shows the simple ghost for the projection direction $(0, 1)$. Parts (b-d) show respectively the composed ghosts:

$$\begin{aligned} G_{\{(0,1),(1,1)\}} &= G_{\{(0,1)\}} * G_{\{(1,1)\}}, \\ G_{\{(-1,1),(0,1),(1,1)\}} &= G_{\{(-1,1)\}} * G_{\{(0,1),(1,1)\}}, \\ G_{\{(2,1),(-1,1),(0,1),(1,1)\}} &= G_{\{(2,1)\}} * G_{\{(-1,1),(0,1),(1,1)\}}. \end{aligned}$$

Normand and Guédon proved that any rectangular domain that does not contain the composed ghost for a given projection set, has necessarily a unique inverse solution [NG98]. This proposal generalises Katz' criterion for images of arbitrary shape.

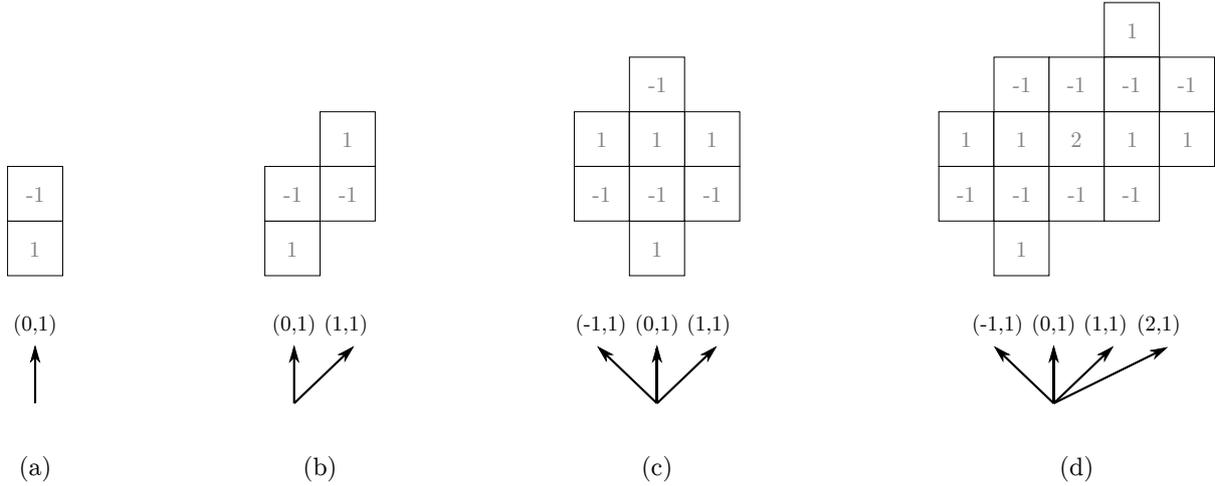


Figure 2: (a) Simple ghost $G_{(0,1)}$ with null projection values in direction $(0,1)$. The following constructs the composed ghost $G_{\{(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1)\}}$ by the iterative 2D convolutions with $G_{\{(p,q)\}}$ for directions (p,q) in the set $\{(-1,1), (1,1), (2,1)\}$.

2.2.2. Inverse Mojette Algorithm

The reconstruction algorithm aims at finding a reconstructible bin and at writing its value in the image by back-projection. Bins are reconstructible when they result from a unique pixel of the image. Once a bin is reconstructed, its contribution is subtracted from all the projections involved in the reconstruction. While a bin is reconstructed, the related pixel is removed from the problem, paving the way to reconstruct further bins. Figure 3 shows the first step of the reconstruction of a 3×3 image from a projection set whose directions (p,q) are in the set $\{(1,1), (0,1), (-1,1)\}$. The image is reconstructible since the composed ghost is not con-

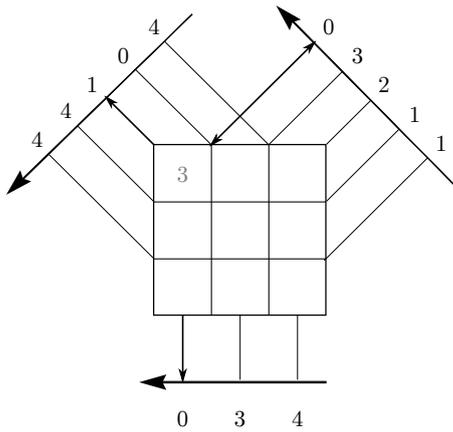


Figure 3: First step of the Mojette inverse of a 3×3 image by three projections whose directions (p,q) are in the set $\{(0,1), (-1,1), (1,1)\}$. The first bin of the projection $(1,1)$ is a reconstructible bin as it fully defined the first pixel. Its value is back-projected in the image and is subtracted from all the projections.

tained in the image domain (this ghost is depicted in Fig. 2 (c)). The first bin of the projection $(1,1)$ is reconstructible as it sums only the pixel on the top left corner. After the back-projection, the value of the related bins in the three projections are subtracted by the value of the constructible bin.

Observing that the reconstruction propagation from the image corners to its center, Normand et al. showed that given an image domain and a projection set, a dependency graph between the image pixels can be found [NKÉ06]. Within this graph, considering that a single projection is dedicated to the reconstruction of one line of the image, a reconstruction path can be pre-determined. Figure 4 illustrates such a path inside the dependency graph of a 6×4 image with the following projection set $S = \{(2,1), (1,1), (0,1), (-1,1)\}$. We consider here that the reconstruction propagation progresses from left to right.

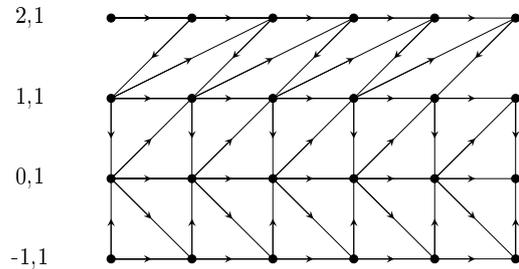


Figure 4: Dependency graph for a 6×4 image given the four projection directions (p,q) in the set $\{(2,1), (1,1), (0,1), (-1,1)\}$. The reconstruction is from left to right. Vertices represent image pixels while directed edges correspond to dependencies between pixels.

3. Mojette Re-projection

In this section, we present a new approach based on the linearity of the Mojette transform to decompose its inverse operation into partial reconstructions. Particularly, we show how each projection contributes independently to the re-projection process. The second part highlights an equivalent method based on 1D convolutions, that avoids the explicit reconstruction of the image.

3.1. Partial Reconstructions

The linear property of the Mojette inverse enables the decomposition of the reconstruction process into partial reconstructions that can be individually computed from each projection and re-projected along any arbitrary direction.

Let S be a set of Q projection directions in the form $(p_i, q_i = 1)$. Then $\sum q_i = Q$ and, according to Eq. (3), any $P \times Q$ domain is uniquely reconstructible by the set of projections with directions in S . Let R be a subset of S , a partial reconstruction is the process that reconstructs an image f_S^R from the set of projections R (i.e. disregarding Eq. (3) if $R \subsetneq S$), completed by null-valued projections in the missing directions $S \setminus R$. If subsets R_i form a partition of S then, by linearity, $f = \sum_i f_S^{R_i}$. Figure 5 shows an example of partial reconstructions (a-c) with projections in the set $S = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1)\}$. Figure 5 (a) to (c) respectively depict the partial reconstructions from the subsets $\{(0, 1)\}$, $\{(1, 1)\}$ and $\{(-1, 1)\}$. The sum of the three partially reconstructed images $f_S^{\{(0,1)\}}$, $f_S^{\{(1,1)\}}$ and $f_S^{\{(-1,1)\}}$ yields the reconstructed image f as shown in Fig. 5 (d) since $\{(0, 1)\}$, $\{(1, 1)\}$ and $\{(-1, 1)\}$ form a partition of S .

Similarly to the inverse Mojette transform, the forward transform is linear. Hence the sum of the projections along direction (p, q) computed from partial reconstructions yields the projection $M_{(p,q)}f$ of the original image along this direction (p, q) :

$$M_{(p,q)}f = \sum_{R \in P} M_{(p,q)}f_S^R, \quad (4)$$

where S is a sufficient set of projection directions for image reconstruction, and f_S^R is the partial reconstruction from the subset R in the partition P of S .

An example of the re-projection process is given in Fig. 5. The image used in this example is the same 3×3 integer image as the one depicted in Fig. 1. The Mojette transform gives a set of the following projection set: $S = \{(2, 1), (1, 1), (0, 1), (-1, 1)\}$ where addition is realised modulo 6. In what follows, we consider the computation of the projection $(2, 1)$ from the three other projections. Figure 5 gives successively the partial reconstructions from $\{(0, 1)\}$, $\{(1, 1)\}$, and $\{(-1, 1)\}$ with their relative re-projection along the projection direction $(2, 1)$.

While the partial reconstructions have infinite

length, the result can be truncated since the part outside the original image is zero-valued. In the next section, we investigate a technique to avoid the 2D reconstructions of images.

3.2. Reconstruction by 1D Convolutions

The partial reconstruction $f_S^{\{(p_i, q_i)\}}$ from the single projection $M_{(p_i, q_i)}f$ is such that, by definition, the other projections of S are zero-valued. It is equivalent to say that the image $f_S^{\{(p_i, q_i)\}}$ is a ghost for those directions. We consider the composed ghost $G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$. Then, the image resulting from a partial reconstruction is composed of this ghost kernel. More particularly, this image can be expressed as the convolution of some sequence h and $G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$:

$$f_S^{\{(p_i, q_i)\}} = h * G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$$

Then for any direction $(p_k, q_k = 1)$,

$$M_{(p_k, q_k)}f_S^{\{(p_i, q_i)\}} = h * (M_{(p_k, q_k)}G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}). \quad (5)$$

By definition of $f_S^{\{(p_i, q_i)\}}$,

$$M_{(p_i, q_i)}f_S^{\{(p_i, q_i)\}} = M_{(p_i, q_i)}f$$

therefore

$$h = (M_{(p_i, q_i)}f) *^{-1} (M_{(p_i, q_i)}G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}). \quad (6)$$

Using Eq. (5) and h from Eq. (6), we are able to compute the projection of the partial reconstruction $f_S^{\{(p_i, q_i)\}}$ along any direction (p_k, q_k) with 1D operations (provided that $M_{(p_k, q_k)}G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$ and $M_{(p_i, q_i)}G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$ are precomputed).

Furthermore, since $G_{S \setminus \{(p_i, q_i)\}}$ is composed by convolutions:

$$M_{(p_k, q_k)}f_S^{\{(p_i, q_i)\}} = (M_{(p_i, q_i)}f) *_{(p_j, q_j) \in S \setminus \{(p_i, q_i)\}}^{-1} (M_{(p_i, q_i)}G_{\{(p_j, q_j)\}}) *_{(p_j, q_j) \in S \setminus \{(p_k, q_k)\}} (M_{(p_i, q_i)}G_{\{(p_j, q_j)\}}) \quad (7)$$

In Eq. (7), each $M_{(p_i, q_i)}G_{(p_j, q_j)}$ corresponds to the projection along direction (p_i, q_i) of the simple ghost for direction (p_j, q_j) and is equal to the sequence:

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ -1 & \text{if } t = j - i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, the re-projection of the partial reconstruction can be computed from a single projection and the related ghost kernel by Eq. (7) where the projection of the ghost is expressed as 1D deconvolutions and 1D convolutions with basic kernels.

4. Applications to Distributed Storage Systems

In distributed storage systems, redundancy is key to provide reliability and face inevitable software and

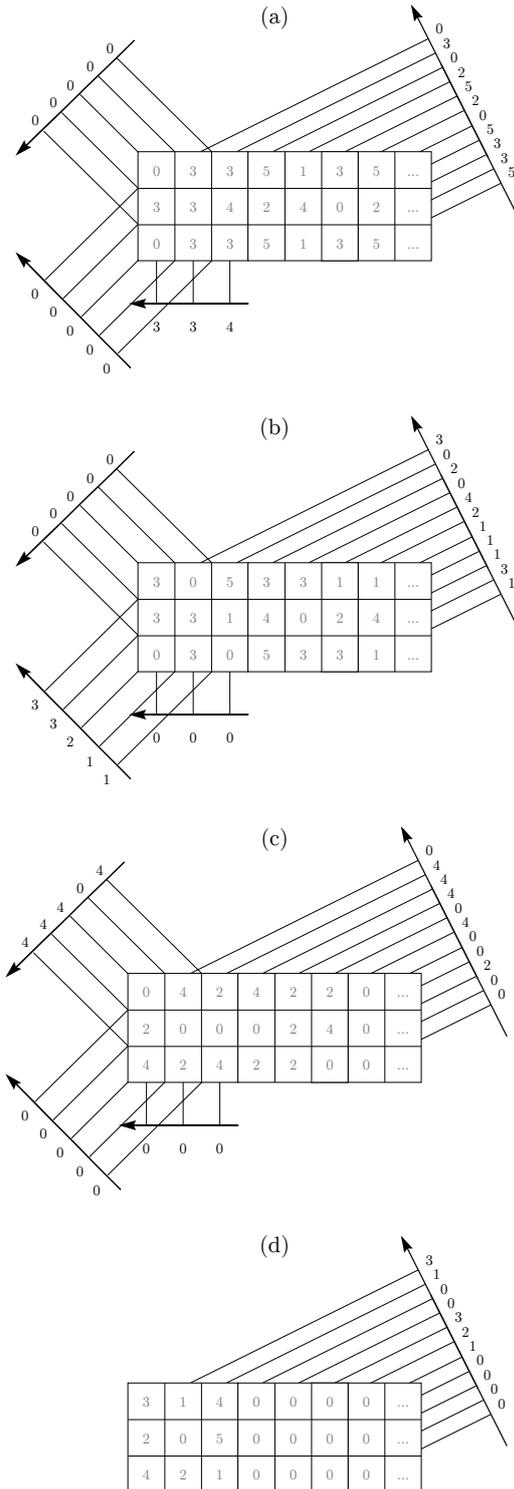


Figure 5: Re-projection of three partial reconstructions. The figures depict the partial reconstructions respectively from the projections $(0, 1)$, $(1, 1)$ and $(-1, 1)$. The re-projection is done following the direction $(2, 1)$. The last figure corresponds to the sum of the three partial reconstructions which equals the original image.

hardware failures. Plain replication is the standard technique that distributes several copies of an image on remote storage nodes to handle data unavailability. While simple, this technique induces high storage overhead defined by the factor of replication.

Erasure coding has become a crucial alternative that provides similar fault-tolerance and reduces significantly this storage overhead. An (n, k) erasure code divides an image into k blocks that are used to compute $r = n - k$ redundant blocks. A Maximal Distance Separable (MDS) code (e.g. Reed Solomon [PD03]) depicts a code that is able to retrieve the image from any set of k blocks among the n . These n blocks are then distributed to different storage nodes. While the system is able to face r failures, its storage overhead is $1 + \frac{r}{k}$.

4.1. Mojette Erasure Coding

The Mojette transform can be used as an erasure code [NGPB96]. Since the number of projections is not limited, redundancy is generated when it is beyond the sufficient number of projections required to satisfy reconstruction criteria (as depicted in Section 2.2.1). In this case, the reconstruction is possible even when some projections are erased.

We consider the following constraint over projections: $q_i = 1$. According to Katz' criterion, and considering a rectangular grid, it is possible to reconstruct the grid using any subset of Q projections. Thus, the (n, k) Mojette erasure code is defined such as k is the image height, and n corresponds to the number of projections. Then, the image is reconstructible even if $n - k$ projections are lost. While the Mojette erasure code is able to retrieve the image from any subset of k projections among n , the size of projections is variable and the code is $(1 + \epsilon)$ MDS, i.e. asymptotically optimal in terms of code size.

4.2. Node Repair and Redundancy Rate

Node repairing and fault-tolerance adaptation are two applications of the re-projection process in distributed storage systems. The repair problem deals with the reconstruction of the whole information contained in a storage node after suffering from permanent failure. A naive repairing process consists in fetching k projections for each file concerned by the projections contained in the failed node. Then, the auxiliary node fully reconstructs the related files, and generates the desired redundant information. Many problems arise from this method. The first concerns the computation centralization at the auxiliary node. The re-projection technique in this paper enables a distributed computation since each node involved in the reconstruction process transmits its contribution as partial reconstruction projection along the desired direction. The auxiliary node needs only to sum the received projections.

Node repairing is a growing concern as the volume

of data increases in storage systems. Thus, fetching k projections for each file contained in a disk can induce tera-bytes of data to transfer. Major cloud services as Facebook [RSG*13] significantly suffer from it. Wang et al. [WDB10] showed that it is possible to send a amount of information lower than k to rebuild a node. In our case, network coding appears as a solution to reduce the network load since any intermediate node between the contributors and the reconstructing node is able to merge the contributions from different nodes.

When the re-projection direction corresponds to a new direction, this technique corresponds to generating new redundant projections. Thus, it appears as an efficient way to increase the fault-tolerance of a system by adapting the redundancy rate after the transform.

5. Conclusion

In this paper, we rely on the linearity of the Mojette transform to decompose the reconstruction process into partial reconstructions. We show that the projection of these reconstructions following new directions can be aggregated in order to generate redundant projections. This novel approach induces distributed load during re-projection. Furthermore, we show that this process is equivalent to a 1D convolution and deconvolution, avoiding to fully reconstruct images. This technique has significant advantages in reliable storage systems as a way to both repair erased projections and increase data reliability. Then, our future work will focus on the capability to decrease the network load.

References

- [Dea07] DEANS S. R.: *The Radon transform and some of its applications*. Courier Dover Publications, 2007.
- [GN05] GUÉDON J., NORMAND N.: The Mojette transform: The first ten years. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Andres E., Damiand G., Lienhardt P., (Eds.), vol. 3429 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 79–91.
- [GPN01] GUÉDON J. P., PARREIN B., NORMAND N.: Internet distributed image information system. *Integrate Computer-Aided Engineering*. Vol. 8, Num. 3 (August 2001), 205–214.
- [Gué09] GUÉDON J.: *The Mojette transform. Theory and applications*. ISTE-WILEY, January 2009.
- [Kat78] KATZ M.: *Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections*. Springer-Verlag Berlin ; New York, 1978.
- [MF93] MATUŠ F., FLUSSER J.: Image representation via a finite radon transform. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*. Vol. 15, Num. 10 (October 1993), 996–1006.
- [NG98] NORMAND N., GUÉDON J.-P.: La transformée Mojette: une représentation redondante pour l'image. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*. Vol. 326, Num. 1 (1998), 123 – 126.
- [NGPB96] NORMAND N., GUEDON J. V., PHILIPPE O., BARBA D.: Controlled redundancy for image coding and high-speed transmission. vol. 2727, pp. 1070–1081.
- [NKÉ06] NORMAND N., KINGSTON A., ÉVENOU P.: A geometry driven reconstruction algorithm for the Mojette transform. In *DGCI*, vol. 4245 de *LNCS*. Springer Berlin Heidelberg, 2006, pp. 122–133.
- [PD03] PLANK J. S., DING Y.: *Note: Correction to the 1997 Tutorial on Reed-Solomon Coding*. Tech. Rep. CS-03-504, University of Tennessee, April 2003.
- [RSG*13] RASHMI K. V., SHAH N. B., GU D., KUANG H., BORTHAKUR D., RAMCHANDRAN K.: A solution to the network challenges of data recovery in erasure-coded distributed storage systems: A study on the facebook warehouse cluster. In *Proceedings of the 5th USENIX Conference on Hot Topics in Storage and File Systems* (Berkeley, CA, USA, 2013), HotStorage'13, USENIX Association, pp. 8–8.
- [WDB10] WANG Z., DIMAKIS A. G., BRUCK J.: Rebuilding for array codes in distributed storage systems. In *GLOBECOM Workshops (GC Wkshps), 2010 IEEE* (2010), IEEE, pp. 1905–1909.

Segmentation de nœuds de bois à partir d'images tomodynamétriques : approches transversales et tangentielles

Adrien Krähenbühl¹

¹ LORIA, UMR CNRS 7503, Université de Lorraine, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy.

Résumé

Le traitement automatique des images tomodynamétriques de bois doit permettre aux scieries d'optimiser le rendement et la qualité des planches. Les nœuds de bois sont le principal facteur de qualité d'une planche et déterminer une méthode de segmentation adaptée est un enjeu important. Cet article propose une revue de deux méthodes proposées qui considèrent les coupes transversales initiales [KKDR*14] et des coupes tangentielles aux cerne [KRK*14]. Elles sont construites en intégrant les connaissances a priori sur la structure d'un tronc et la géométrie des objets étudiés, les nœuds. Ces connaissances permettent de spécialiser les approches théoriques classiques et d'obtenir des résultats très proches d'une segmentation manuelle. Ces deux approches entièrement automatiques sont comparées à trois approches nécessitant des marqueurs sur les objets ciblés, issues du cadre des Power Watershed [CGNT11]. Elles sont implémentées dans le logiciel TKDetection [Krä14], libre de droits.

Mots clé : segmentation d'image, tomodynamétrie, nœuds de bois, analyse géométrique.

1. Introduction

L'analyse des images tomodynamétriques de bois obtenues par un scanner à rayons X est aujourd'hui un problème à la fois de recherche agronomique et industriel. Les scieries sont directement concernées par les solutions d'analyse non destructive des troncs, pour maximiser le prix de revient des planches découpées. En particulier, détecter en

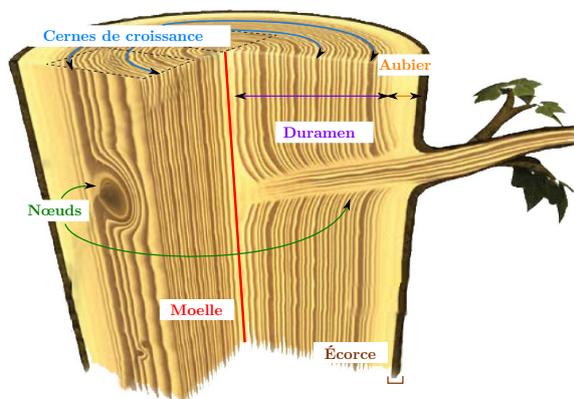
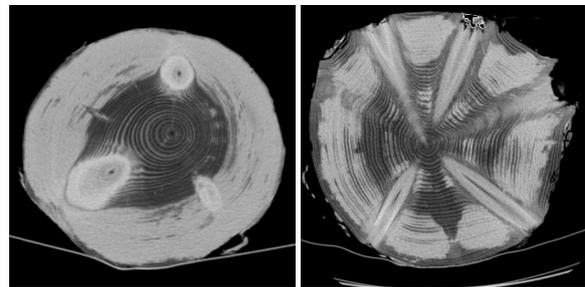


Figure 1. Organisation interne des différents constituants d'un tronc.



(a) Coupe de Pin.

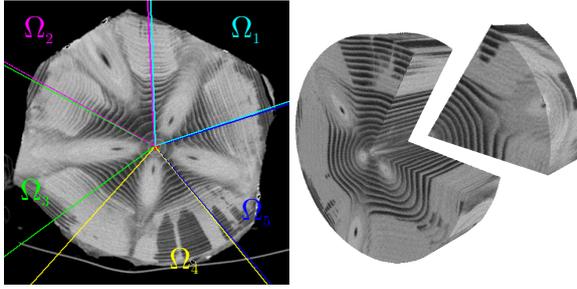
(b) Coupe d'Épicéa.

Figure 2. Mise en évidence de l'intensité similaire des nœuds et de l'aubier humide. Lorsque les nœuds sont en contact avec l'aubier, leurs frontières ne sont plus clairement distinctes.

amont de la découpe le positionnement et les caractéristiques des nœuds de bois †, principaux facteurs de qualité d'une planche, permettrait de calculer l'orientation du tronc engendrant le meilleur rendement [SBH*14].

Dans ce contexte, l'étape essentielle de l'analyse des images tomodynamétriques est la segmentation des nœuds. La difficulté majeure lors de l'analyse de ce type

†. Nœud de bois : partie initiale de la branche située à l'intérieur du tronc.



(a) Zones de nœuds d'une coupe. (b) Volume d'une zone de nœud.

Figure 3. Définition des zones de nœud pour isoler chaque nœud. En a une coupe transversale avec les délimitations des intervalles angulaires Ω_1 à Ω_5 des cinq zones de nœud. En b le volume d'une zone de nœud extraite d'un verticille.

d'image est relative à l'humidité de l'aubier † (voir Figure 1). Sur une image tomodynamétrique, l'intensité de l'aubier humide est très proche, voire identique, à celle des nœuds, et il est compliqué de les discerner lorsqu'ils sont en contact (voir Figure 2). Les techniques classiques de segmentation d'image ne permettent pas d'obtenir les frontières précises des nœuds, comme cela a été présenté dans [KKDR*14].

Afin d'obtenir une segmentation précise, il est proposé d'intégrer des connaissances a priori dans le processus. Ces informations sont d'ordres structurels et géométriques : croissance centrée sur la moelle, cernes concentriques, tronc tubulaire, sections circulaires des nœuds, etc. (voir Figure 1). Elles sont intégrées dans chacune des étapes de la segmentation pour diriger la recherche des frontières des nœuds. Le processus global de segmentation proposé est composé de deux phases :

1. Détection des zones de nœud
2. Segmentation de chaque zone de nœud

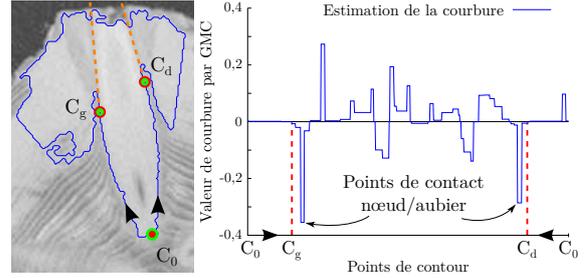
Le concept de zone de nœud et le principe de détection associé sont détaillés dans [KKDR*12] et [KKDR13]. Ils permettent d'isoler chaque nœud dans un sous-volume de l'image initiale et garantissent la présence d'un et un seul nœud dans ce volume.

Dans cet article, deux méthodes de segmentation d'une zone de nœud sont présentées : à partir des coupes transversales (section 2) et à partir de coupes tangentielles (section 3). Elles sont ensuite comparées entre elles et à trois méthodes de segmentation existantes, sur un échantillon de nœuds de trois espèces d'arbres différentes (section 4).

2. Segmentation transversale

Cette approche de segmentation, détaillée dans [KKDR*14], considère un nœud isolé dans une zone de nœud. Une zone de nœud est un sous-ensemble des coupes transversales aux cernes, générées par un scanner à rayon X (voir Figure 3). L'approche de segmentation

†. Aubier : partie du tronc située entre l'écorce et le duramen, qui transporte la sève.



(a) Segmentation de (b) Estimation de la courbure du contour de la section d'un nœud. la composante connexe 2D.

Figure 4. Utilisation de l'estimateur de courbure GMC [KL09] pour détecter les points de contact C_g et C_d entre le nœud et l'aubier et pour prolonger le contour du nœud dans l'aubier à partir de l'information de courbure dans le voisinage local de ces deux points.

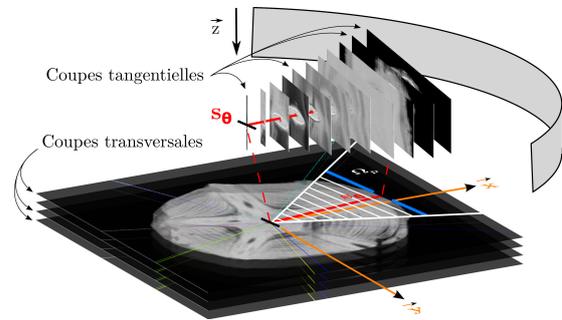


Figure 5. Génération des coupes tangentielles d'une zone de nœud entre la moelle du tronc et l'écorce.

proposée utilise en premier lieu des extractions en composantes connexes 2D et 3D à partir d'un seuillage. Ce seuil est défini en utilisant l'information a priori de densité des nœuds de bois. En résulte une composante connexe 3D contenant à la fois le nœud et l'aubier humide connecté. La séparation des deux entités s'effectue alors coupe par coupe. Sur le contour de la section 2D de la composante connexe 3D, on utilise l'estimateur de courbure proposé par B. Kerautret et J.-O. Lachaud [KL09]. Il permet à la fois de détecter les points de contact entre le nœud et l'aubier et d'estimer la trajectoire du contour du nœud dans l'aubier (voir Figure 4). Les sections du nœud ainsi définies sont concaténées pour constituer le volume 3D du nœud segmenté.

3. Approche tangentielle

L'approche tangentielle se base sur le concept de coupes tangentiels aux cernes de croissance (voir Figure 1), proposé par J.-R. Roussel et al. [RMK*14]. Le volume de la zone de nœud est ré-échantillonné en un ensemble de coupes tangentiels, entre la moelle du tronc et l'écorce (voir Figure 5). La moelle du nœud est détectée à partir d'une adaptation de l'algorithme de Boukadida et al. [BLC*12], dédié initialement à la moelle du tronc. Chaque coupe tangentielle est ensuite segmentée individuellement. L'information a priori de circularité de la section d'un nœud sur une coupe

orthogonale à sa moelle est utilisée pour tester l'ensemble des contours possibles du nœud, des ellipses discrètes centrées sur la moelle. Une fois l'ellipse la plus probable déterminée sur chaque coupe, le volume du nœud est reconstitué en utilisant une régression sur la série des rayons d'ellipse obtenus, puis en concaténant l'ensemble des sections du nœud ainsi définies. Une version détaillée de cette approche est proposée dans [KRR*14].

4. Comparaisons

Les deux méthodes, transversales (section 2) et tangentielles (section 3), notées respectivement CKD (Curvature-based Knot Detection) et TKD (Tangential-based Knot Detection), sont comparées à trois approches de segmentation entrant dans le cadre des Power Watershed [CGNT11] :

PW : lorsque avec le paramètre $q = 2$;

KR : avec $q \rightarrow \infty$ et le calcul de l'arbre recouvrant par Kruskal ;

PR : avec $q \rightarrow \infty$ et le calcul de l'arbre recouvrant par Prim ;

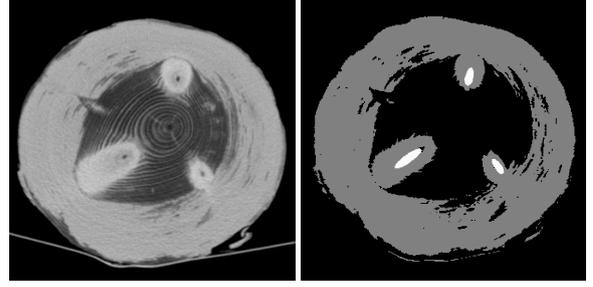
Ces trois approches nécessitent de placer des marqueurs, à la fois sur l'arrière-plan de l'image et sur l'objet à segmenter. Le processus consiste ensuite à décider si les pixels non marqués appartiennent à l'arrière-plan ou à l'objet. Pour placer les marqueurs dans les zones de nœuds, deux stratégies sont utilisées. L'arrière-plan est défini à partir de l'ensemble des pixels inférieurs à un seuil donné. Suivant les critères calculés, le seuil utilisé sera 150 ou 175. Pour les objets à segmenter, chaque nœud est marqué manuellement et individuellement en positionnant un tube en son centre (voir Figure 6). On effectue également une segmentation manuelle qui servira de référence pour mesurer la qualité de chaque méthode de segmentation.

Les expérimentations sont menées sur un échantillon de trois verticilles[§] de nœuds, appartenant chacun à une espèce différente de résineux : un Épicéa commun (SPR), un Sapin pectiné (FIR) et un Pin sylvestre (PIN). L'aubier de ces trois verticilles est humide et représente près de la moitié du volume total de bois.

Les critères de comparaison permettent d'évaluer les volumes des nœuds obtenus par chaque méthode de segmentation. Les critères volumiques et de distance considèrent l'ensemble E_R des voxels du volume de référence, obtenu par segmentation manuelle, ainsi que l'ensemble E_S des voxels appartenant au volume segmenté. On note E_{S-} l'ensemble des voxels de E_S qui n'appartiennent pas au volume de référence, tels que $E_{S-} = E_S \setminus E_R$. Les critères de courbure utilisent quant à eux l'estimateur de courbure proposé par D. Cœurjolly et al. [CLL13], qui sera noté κ , et la mesure d'erreur quadratique moyenne MSE mesurée localement entre un surfel s_S du volume segmenté et le surfel s_R du volume de référence le plus proche, telle que $MSE_{\kappa}(s_S, s_R) = (\kappa(s_S) - \kappa(s_R))^2$.

Les critères sont définis comme suit :

§. Verticille de nœuds : groupe de nœuds situés à une même hauteur dans l'arbre et répartis tout autour de la moelle.



(a) Coupe originale

(b) Marqueurs.

Figure 6. Initialisation des marqueurs pour les algorithmes PW, KR et PR. L'arrière-plan est marqué en noir et les nœuds en blanc. Ces algorithmes permettent d'associer chaque pixel gris à l'arrière-plan ou à un nœud.

F-measure combine les notions de rappel/précision calculées sur E_S et E_R , de façon égalitaire avec pénalisation réciproque. Ce critère est compris entre 0 et 1. Il vaut 0 si le rappel ou la précision valent 0, et 0,5 si les deux valent 0,5 :

$$F\text{-measure} = \frac{2 \times \text{rappel} \times \text{precision}}{\text{rappel} + \text{precision}} \quad (1)$$

δ_H est la distance de Hausdorff, la distance maximale d'un voxel mal segmenté (faux positif) au plus proche voxel du volume de référence :

$$\delta_H(E_S, E_R) = \max_{v_S \in E_{S-}} \left\{ \min_{v_R \in E_R} d_E(v_S, v_R) \right\} \quad (2)$$

δ_m est la distance euclidienne moyenne entre des voxels mal segmentés et les plus proches du volume de référence :

$$\delta_m(E_S, E_R) = \frac{1}{E_{S-}} \times \sum_{v_S \in E_{S-}} \min_{v_R \in E_R} d_E(v_S, v_R) \quad (3)$$

ξ_{moy} est l'erreur de courbure moyenne. Elle correspond à la moyenne des écarts quadratiques de chaque surfel s_S de la surface du volume segmenté, au plus proche surfel s_R du volume de référence :

$$\xi_{moy}(E_S, E_R) = \frac{1}{s_S} \sum_{s_S \in E_S} MSE_{\kappa}(s_S, s_R) \quad (4)$$

ξ_{max} est l'erreur de courbure maximum. Elle correspond au maximum des erreurs quadratiques moyennes calculées entre un surfel s_S de la surface du volume segmenté et le plus proche surfel s_R du volume de référence :

$$\xi_{max}(E_S, E_R) = \max_{s_S \in E_S} MSE_{\kappa}(s_S, s_R) \quad (5)$$

L'ensemble des mesures effectuées sont récapitulées et illustrées Tableau 1. Pour les algorithmes PW, KR et PR, trois seuils d'arrière-plan ont été testés : 100, 150 et 175. Le tableau présente les mesures pour les seuils ayant permis d'obtenir les meilleurs résultats. Pour cela, les critères $F\text{-measure}$, δ_H et δ_m sont calculés à partir des volumes obtenus avec un seuil de 175. Pour les critères de courbure ξ_{moy} et ξ_{max} , les volumes segmentés avec un seuil de 150 obtiennent les meilleurs résultats. Toutes ces mesures, ainsi que les illustrations du Tableau 1, ont été réalisées à l'aide

Méthode	PW _q = 2		Kruskal		Prim		CKD		TKD		Manuelle	
	175	150	175	150	175	150	175	150	175	150	175	150
SPR												
<i>F-mesure</i>	0.438	0.445	0.432	0.432	0.432	0.432	0.728	0.728	0.770	0.770	1	1
δ_H	14	14	14	14	14	14	18.44	18.44	10.49	10.49	0	0
δ_m	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.2	0.2	0.5	0.5	0	0
ξ_{moy}	0.0126	0.0028	0.0099	0.0028	0.0099	0.0099	0.0044	0.0044	0.0036	0.0036	0	0
ξ_{max}	0.1187	0.0651	0.1170	0.0651	0.1170	0.1170	0.0872	0.0872	0.0833	0.0833	0	0
temps (s)	47.708	3.44	18.24	3.44	18.24	18.24	5.88	5.88	1.21	1.21	-	-
FIR												
<i>F-mesure</i>	0.839	0.83	0.839	0.83	0.839	0.839	0.849	0.849	0.85	0.85	1	1
δ_H	21.47	12.81	18.38	12.81	18.38	18.38	11	11	21.75	21.75	0	0
δ_m	0.37	0.28	0.39	0.28	0.39	0.39	0.11	0.11	0.28	0.28	0	0
ξ_{moy}	0.0015	0.0015	0.0018	0.0015	0.0018	0.0018	0.0022	0.0022	0.0014	0.0014	0	0
ξ_{max}	0.0445	0.0293	0.0451	0.0293	0.0451	0.0451	0.0264	0.0264	0.0373	0.0373	0	0
temps (s)	38.21	2.75	14.98	2.75	14.98	14.98	5.35	5.35	1.98	1.98	-	-
PIN												
<i>F-mesure</i>	0.48	0.389	0.52	0.389	0.52	0.52	0.78	0.78	0.805	0.805	1	1
δ_H	9.95	97.88	9.95	97.88	9.95	9.95	54.24	54.24	40.96	40.96	0	0
δ_m	0.27	0.35	0.25	0.35	0.25	0.25	1.6	1.6	1.42	1.42	0	0
ξ_{moy}	0.0051	0.0080	0.0069	0.0080	0.0069	0.0069	0.0041	0.0041	0.0025	0.0025	0	0
ξ_{max}	0.0816	0.0534	0.0700	0.0534	0.0700	0.0700	0.1706	0.1706	0.0374	0.0374	0	0
temps (s)	45.71	3.19	17.4	3.19	17.4	17.4	3.22	3.22	0.86	0.86	-	-

Table 1. Comparaisons des méthodes de segmentation CKD et TKD proposées avec les algorithmes PW, KR et PR du cadre des Power Watershed. Les résultats de *F-mesure*, δ_H , δ_m et les temps de calculs sont obtenus pour des seuils d'arrière-plan de 175 (vignettes de gauche) tandis que les mesures des erreurs de courbure ξ_{moy} et ξ_{max} sont obtenues pour un seuil de 150 (vignettes de droite), et représentées avec un dégradé du blanc (aucune erreur) au rouge (erreur maximum). Sont surlignés les premiers et seconds meilleurs scores pour chaque mesure.

des outils *volShapeMetrics* et *3dLocalEstimators* des bibliothèques DGtal [Dt11a] et DGtalTools [Dt11b].

Le constat principal de ces expérimentations est l'avantage indéniable de la méthode TKD sur les autres. Elle totalise plus de la moitié des meilleurs résultats sur l'ensemble des critères. Malgré l'utilisation de marqueurs pour diriger la segmentation, les méthodes PW, KR et PR obtiennent une segmentation des nœuds moins précise. Elles tendent à sous-estimer le volume du nœud, ce qui leur permet d'obtenir de bons résultats pour les distances δ_H et δ_m , alors que CKD et TKD ont plutôt tendance à les surestimer. On peut noter les temps de calculs intéressants de KR, largement inférieurs à ceux de PW et PR, mais cependant plus importants que ceux de TKD. Les critères de courbures permettent de prendre en compte l'aspect géométrique du volume des nœuds et leur cohérence avec l'apparence visuelle de la segmentation manuelle. Sur les vignettes de droite du [Tableau 1](#), les divergences de courbures importantes sont visualisées en rouge. Le verticille de Pin met en évidence la robustesse de CKD et TKD sur des nœuds atypiques, lorsque les autres méthodes divergent assez nettement sur le critère ξ_{moy} . Il vient contrebalancer les critères volumiques où la sous-estimation du volume leur permet d'obtenir de bons résultats : PR obtient les meilleurs résultats pour les mesures de distance.

5. Conclusion

L'intégration de connaissances a priori dans le processus de segmentation permet d'améliorer la précision et la robustesse de la segmentation tout en diminuant les temps de calcul. La spécialisation et la combinaison d'algorithmes génériques de segmentation se basent sur des connaissances d'ordres structurels et géométriques. Elles apportent une aide à la décision essentielle pour prendre en compte à la fois les spécificités et la diversité des espèces d'arbres, et bien sûr celles des images inhérentes. Les temps de calculs sont actuellement obtenus sur une implémentation séquentielle, librement disponible [Krä14]. Les deux méthodes proposées comportent cependant un fort potentiel de parallélisation qu'il serait intéressant d'étudier. L'utilisation de ces méthodes dans un contexte industriel nécessite en effet une attention particulière au temps de calcul, pour les intégrer à la chaîne de production sans impacter négativement le débit actuel.

Références

- [BLC*12] BOUKADIDA H., LONGUETAUD F., COLIN F., FREYBURGER C., CONSTANT T., LEBAN J.-M., MOTHE F. : Pithextract : a robust algorithm for pith detection in computer tomography images of wood – Application to 125 logs from 17 tree species. *Computers and Electronics in Agriculture*. Vol. 85, Num. 0 (2012), 90–98.
- [CGNT11] COUPRIE C., GRADY L., NAJMAN L., TALBOT H. : Power watersheds : A unifying graph-based optimization framework. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*. Vol. 33, Num. 7 (July 2011), 1384–1399.
- [CLL13] COEURJOLLY D., LACHAUD J.-O., LEVALLOIS J. : Integral based curvature estimators in digital geometry. In *17th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2013)* (mar 2013), vol. 7749 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 215–227.
- [Dt11a] DGTAL TEAM : DGtal : Digital geometry tools and algorithms library, 2011. <http://libdgtal.org>.
- [Dt11b] DGTAL TEAM : DGtaltools, 2011. <https://github.com/DGtal-team/DGtalTools>.
- [KKDR*12] KRÄHENBÜHL A., KERAUTRET B., DEBLEL-RENNESON I., LONGUETAUD F., MOTHE F. : Knot detection in X-ray CT images of wood. In *ISVC* (July 2012), vol. 7432 de *LNCS*, pp. 209–218.
- [KKDR13] KRÄHENBÜHL A., KERAUTRET B., DEBLEL-RENNESON I. : Knot segmentation in noisy 3D images of wood. In *DGCI* (March 2013), vol. 7749 de *LNCS*, pp. 383–394.
- [KKDR*14] KRÄHENBÜHL A., KERAUTRET B., DEBLEL-RENNESON I., MOTHE F., LONGUETAUD F. : Knot segmentation in 3d CT images of wet wood. *Pattern Recognition*. Vol. 1, Num. 0 (2014), 1–17.
- [KL09] KERAUTRET B., LACHAUD J.-O. : Curvature estimation along noisy digital contours by approximate global optimization. *Pattern Recognition*. Vol. 42, Num. 10 (October 2009), 2265–2278.
- [Krä14] KRÄHENBÜHL A. : TKDetection, July 2014. <https://github.com/akrah/TKDetection>.
- [KRK*14] KRÄHENBÜHL A., ROUSSEL J.-R., KERAUTRET B., DEBLEL-RENNESON I., MOTHE F., LONGUETAUD F. : Segmentation robuste de nœuds à partir de coupes tangentielles issues d'images tomographiques de bois. In *Actes de la conférence RFIA 2014* (June 2014).
- [RMK*14] ROUSSEL J.-R., MOTHE F., KRÄHENBÜHL A., KERAUTRET B., DEBLEL-RENNESON I., LONGUETAUD F. : Automatic knot segmentation in CT images of wet softwood logs using a tangential approach. *Computers and Electronics in Agriculture*. Vol. 104, Num. 0 (2014), 46–56.
- [SBH*14] STÄNGLE S., BRÜCHERT F., HEIKKILÄ A., USENIUS T., USENIUS A., SAUTER U. : Potentially increased sawmill yield from hardwoods using x-ray computed tomography for knot detection. *Annals of Forest Science* (2014), 1–9.

Watervoxel representation for supporting MRI volume segmentation

D. Cárdenas-Peña¹, V. Machairas², E. Decencière², T. Walter³, G. Castellanos-Dominguez¹

¹Universidad Nacional de Colombia

²MINES ParisTech

³MINES ParisTech, Institut Curie, INSERM

Mots clé : superpixel, watervoxel, watershed, mathematical morphology, MRI segmentation

The use of Magnetic Resonance Image (MRI) volumes for neurology applications allows to study physiological and pathological processes on structural or functional properties of brain regions. For instance, the evolution of neurodegenerative pathologies (like Alzheimer, dementia or schizophrenia) can be evaluated by estimating anatomical or functional structure changes through time or space. MRI is also employed for modeling head conductivity patterns required for brain mapping algorithms.

Automatic techniques have been proposed to process MRI volumes, achieving significant performances. Nevertheless, for real medical applications, computational complexity is a constraint most of the techniques do not meet. Such a drawback is due to the large number of voxels in a regular MRI volume ($\approx 10^7$ voxels).

Fortunately, due to the physical properties of head structure, a brain MRI can be seen as a set of approximately piecewise constant regions. In this sense, it is possible to group all MRI voxels in a smaller set of meaningful elements with enforced connectivity, so reducing the high redundancy of voxel intensities [VCM13]. In the field of digital image processing, such elements are known as superpixels (2D images) or supervoxels (3D volumes) and they are widely employed for reducing the computational complexity of imaging algorithms.

For instance, superpixel representation was employed in a tissue classification task in [VCM13]. Reported results in classification and complexity reduction proved that superpixels achieve significant performance at a lower cost than regular pixel representation. Also, authors in [WCZC14] proposed a brain tumor detection and segmentation algorithm based on conditional random fields using pixel-pairwise affinity and superpixel-level features. Presented results showed that superpixel-based appearance models allow to improve spatial smoothness while reducing the data sampling and computational cost. Finally, a medical segmentation method based on superpixel and fuzzy clustering was introduced in [JWY*14], where the well-known fuzzy c-

means (FCM) algorithm is applied over previously computed superpixels to segment the brain in an MRI. Experiments revealed that the use of superpixels provides stability and artifact robustness to the FCM algorithm.

Nonetheless, the use of superpixels implies the assumption of 2D independent slices on an MRI volume. Such a fact may induce a lack of agreement on adjacent slices and a reduction of performance. Additionally, there are topological features of the image which are not taken into account by the state-of-the-art superpixel generation methodologies.

In this sense, we propose the use of marker controlled watershed transformation for the generation of 3D supervoxels, known as watervoxels, which have been previously introduced by [MDW14] (see also [NP14]).

First, a set of minima are chosen from a regularly distributed cubic grid to be used as the markers for the watershed flooding algorithm. The minimum selection criterion corresponds to the local gradient minimum with the largest volume extinction value inside each cell. Secondly, the image morphological gradient is regularized by adding the normalized distance from the cell marker to each voxel in the cell. For the sake of tunable trade-off between superpixel regularity and boundary adherence, a scaling parameter is included in the regularization term. Such improvements in marker selection and gradient regularization are expected to provide single connected components as homogeneous and regular supervoxels with a suitable boundary adherence.

In order to test the proposed methodology, the well known BrainWeb dataset is used, consisting of 20 simulated MRI volumes of size $256 \times 256 \times 181$ voxels and its provided anatomically labeled regions. For the sake of comparison two baseline approaches are considered. The first one is the simple linear iterative clustering (SLIC), as the state of the art supervoxel generation technique [ASSL12]. The second one is a probabilistic template-based brain tissue segmentation algorithm, which is specifically devoted for head MRI volumes but performing at voxel level [AF05].

To quantitatively measure the supervoxel quality, the boundary recall (BR) criterion is used, and defined as the

percentage of ground-truth contour pixels falling less than 3 voxels away from supervoxel boundaries.

Obtained results show a monotonically increasing BR with respect to the number of elements for both supervoxel techniques. Nevertheless, watervoxels are less sensitive to the regularization parameter than SLIC. Since watervoxels are mainly led by image topological properties and SLIC compactness factor enhances the regularity, more ground-truth boundaries tend to be lost for SLIC than for watervoxels.

Moreover, there is a number of supervoxels from which the baseline template-based approach is overperformed. In fact, in the extreme case, 100% BR is achieved when the number of supervoxels equals the image size. Nevertheless, 87% of BR is achieved by watervoxels using only 1% of the original image size ($\approx 10^5$ elements), while the baseline achieves 84% using the whole image.

Additionally, the contour density (CD) criterion, being defined as the percentage of obtained contour voxels, is employed for measuring the partition irregularity. In this case, the template-based approach achieves the lowest CD (6%), as it does not over-segment the image. On the other hand, watervoxels show a lower CD than SLIC for large numbers of supervoxels. Therefore, it is inferred that proposed approach outperforms SLIC as it achieves the lowest irregularity, while preserving the most boundaries.

As a standard MRI tissue classification performance measure, the average Dice Index (DI) is computed. Such a value measures the percentage of matching between the ground-truth regions and the obtained high-level segmentation. In this case, regions are labeled as the most probable brain tissue inside a (super)voxel. Although the voxel-wise classification approach achieves the best average performance ($91.6\% \pm 1\%$), results for both supervoxel approaches are statistically similar to the baseline, SLIC : $89.7\% \pm 1\%$ and watervoxels : $89.4\% \pm 1\%$.

Finally, as our application is related to brain tissue classification, the straightforward future work corresponds to the inclusion of supervoxels into the template-based scheme so that boundary adherence and tissue classification are improved.

Références

- [AF05] ASHBURNER J., FRISTON K. J. : Unified segmentation. *NeuroImage*. Vol. 26, Num. 3 (juillet 2005), 839–51.
- [ASSL12] ACHANTA R., SHAJI A., SMITH K., LUCCHI A. : SLIC Superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*. Vol. 34, Num. 11 (2012), 2274–2281.
- [JWY*14] JI S., WEI B., YU Z., YANG G., YIN Y. : A new multistage medical segmentation method based on superpixel and fuzzy clustering. *Computational and mathematical methods in medicine*. Vol. 2014 (janvier 2014), 747549.
- [MDW14] MACHAIRAS V., DECENCIÈRE E., WALTER T. : Waterpixels : Superpixels based on the watershed transformation. In *Proc. IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2014).
- [NP14] NEUBERT P., PROTZEL P. : Compact watershed and preemptive slic : On improving trade-offs of superpixel segmentation algorithms. In *Proc. of International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (2014).
- [VCM13] VERMA N., COWPERTHWAITTE M. C., MARKEY M. K. : Superpixels in brain MR image analysis. *Conference proceedings : Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Annual Conference*. Vol. 2013 (janvier 2013), 1077–80.
- [WCZC14] WU W., CHEN A. Y. C., ZHAO L., CORSO J. J. : Brain tumor detection and segmentation in a CRF (conditional random fields) framework with pixel-pairwise affinity and superpixel-level features. *International journal of computer assisted radiology and surgery*. Vol. 9, Num. 2 (mars 2014), 241–53.

POSTERS

Characterization of bijective discretized rotations by Gaussian integers

T. Roussillon¹, D. Coeurjolly¹

¹Université de Lyon, CNRS
INSA-Lyon, LIRIS, UMR5205, F-69622, FRANCE

Résumé

Une rotation discrète est la composition d'une rotation euclidienne et d'une opération d'arrondi. Bien sûr, toutes les rotations discrètes ne sont pas bijectives : par exemple, deux points distincts peuvent avoir la même image pour une rotation discrète donnée. Néanmoins, pour un certain ensemble d'angles, les rotations discrètes sont bijectives. Dans la grille carrée régulière, les rotations discrètes bijectives ont été complètement caractérisées par Nouvel et Rémila (IWICIA'2005). Nous donnons une preuve qui utilise les propriétés arithmétiques des entiers de Gauss.

A discretized rotation is the composition of an Euclidean rotation with a rounding operation. It is well known that not all discretized rotations are bijective : e.g. two distinct points may have the same image by a given discretized rotation. Nevertheless, for a certain subset of rotation angles, the discretized rotations are bijective. In the regular square grid, the bijective discretized rotations have been fully characterized by Nouvel and Rémila (IWICIA'2005). We provide a simple proof that uses the arithmetical properties of Gaussian integers.

Mots clé : Gaussian integers, bijective discretized rotations.

1. Introduction

A discretized rotation is the composition of an Euclidean rotation with a rounding operation to the closest grid point. It is well known that not all discretized rotations are bijective : after a discretized rotation, two distinct points may have the same image (see Fig. 1.b) or the image of all points may not partition the whole plane (the reader may look for the *holes* in Fig. 1.b). Nevertheless, for a certain subset of rotation angles, the discretized rotations are bijective (an example of such discretized rotations is shown Fig. 1.a). In the regular square grid, many authors have discussed about conditions on the angle to have bijective discretized rotations. In [NR05], Nouvel and Rémila have fully characterized bijective discretized rotations (necessary and sufficient conditions on rotation angles). We give in this paper a different proof that uses simple arithmetical properties of Gaussian integers.

In section 2, we recall the crucial properties of Gaussian integers and we give a geometrical interpretation of main arithmetical operations involving Gaussian integers. In section 3, we define a discretized rotation and characterize a certain set of rotation angles by the so-called *twin Pythagorean*

triples. Finally, in section 4, we show theorem 1, which provides a necessary and sufficient condition for rotation angles to lead to bijective discretized rotations.

2. Gaussian integers

The Gaussian integers are the set $\mathbb{Z}[i] := \{u + vi \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$, where $i^2 = -1$. Within the complex plane \mathbb{C} , they constitute the 2-dimensional integer lattice \mathbb{Z}^2 .

2.1. Main properties

As discussed in [HW79][pp. 182–187], Gaussian integers look like usual (or *rational*) integers of \mathbb{Z} . Indeed, the notions of Euclidean division, prime, greatest common divisor are defined. Moreover, every Gaussian integer has a unique factorization into primes (up to order and unit multiples).

More precisely, let κ, κ_j be nonzero integers from $\mathbb{Z}[i]$.

- The *norm* of $\kappa = u + vi$, defined by $N\kappa := \kappa\bar{\kappa} = u^2 + v^2$ is multiplicative, i.e. $N\kappa\kappa_1 = N\kappa N\kappa_1$.
- The units of $\mathbb{Z}[i]$ are the integers of norm 1, i.e. the set $\{\pm 1, \pm i\}$.
- Since there are several units, the product of $\kappa = u + vi$ by any number of units, i.e. the four integers $\pm u \pm vi$, are the *associates* of κ ;

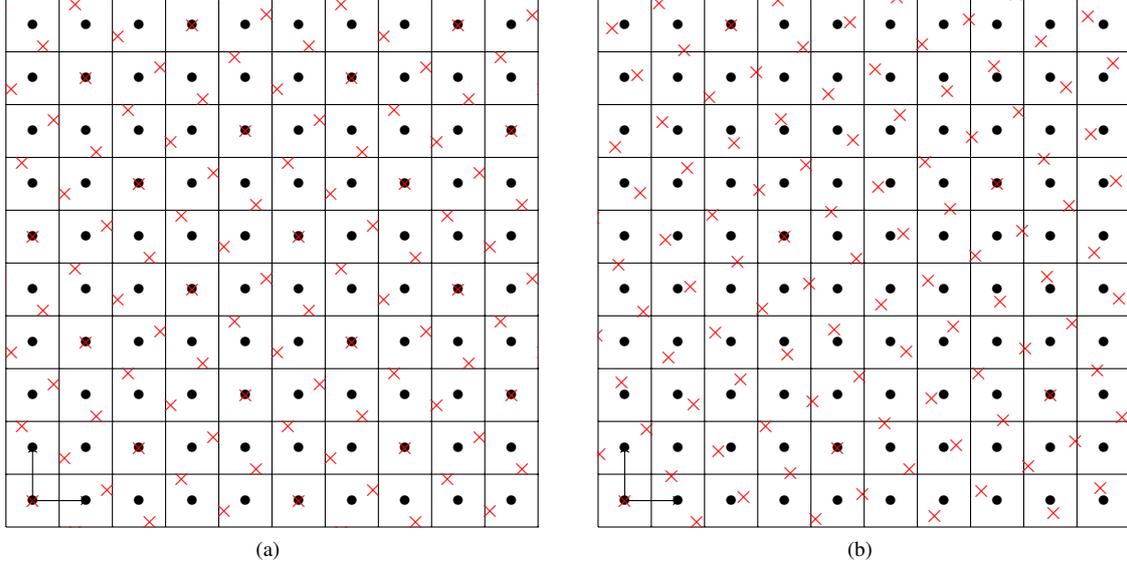


Figure 1: In (a), the rotation by angle θ_a s.t. $\tan(\theta_a) = 4/3$ leads to a bijective discretized rotation because each digitization cell (black squares around black dots) contains one and only one rotated point (red dots). In (b), the rotation angle θ_b s.t. $\tan(\theta_b) = 8/15$ does not lead to a bijective discretized rotation : some digitization cells contain zero (holes) or two points.

- κ is divisible by κ_1 iff there exists κ_2 such that $\kappa = \kappa_1 \kappa_2$;
- A prime is an integer, neither zero nor a unit, divisible only by numbers associated to itself or 1 ;
- Any κ can be obtained as a product of primes (unique up to order and unit multiples) : $\kappa = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$.
- The greatest common divisor $\gcd(\kappa, \kappa_1) = \kappa_2$ is defined such that (i) κ_2 divides both κ and κ_1 and (ii) every common divisor of κ and κ_1 divides κ_2 .

For a complete overview, please refer to [HW79]. We focus now on the geometrical interpretation of Gaussian integers.

2.2. Geometrical interpretation

Gaussian integers are complex numbers. The image of a Gaussian integer $\kappa = u + vi$ is the point (u, v) of the integer lattice \mathbb{Z}^2 .

- Let us first observe that :
- an addition by κ maps \mathbb{Z}^2 to $\mathbb{Z}^2 + (u, v)$ (translation).
 - a multiplication by κ maps \mathbb{Z}^2 to $\mathbb{Z}(u, v) + \mathbb{Z}(-v, u)$ (rotation by angle θ such that $\tan(\theta) = v/u$ and scaling by $\sqrt{N\kappa}$; see Fig. 2).

3. Discretized rotations

Given a Gaussian integer α , the Euclidean rotation is the map defined as follows :

$$r_\alpha : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C} \\ \forall \kappa \in \mathbb{Z}[i], r_\alpha(\kappa) = \frac{\kappa \cdot \alpha}{\sqrt{N\alpha}}. \quad (1)$$

Moreover, we focus on *Pythagorean* rotation angles, i.e. such that $\sqrt{N\alpha} = c \in \mathbb{Z}$.

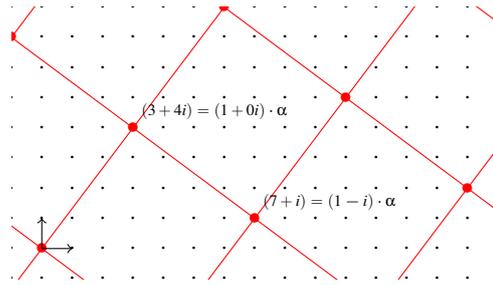


Figure 2: A multiplication by $\alpha := (3 + 4i)$ results in a rotation of angle θ s.t. $\tan(\theta) = 4/3$ and a scaling by 5. Moreover, the image of any Gaussian integer that is a multiple of α (red dots) is a point of the lattice $\mathbb{Z}(3, 4) + \mathbb{Z}(-4, 3)$ (red grid).

3.1. Pythagorean triples

Pythagorean triples are triples (a, b, c) of strictly positive integers such that $a^2 + b^2 = c^2$. Setting $\alpha := a + bi$, Pythagorean triples provide solutions to the equation : $N\alpha = c^2$. *Primitive* Pythagorean triples are such that $\gcd(a, b, c) = 1$.

It is well known [HW79][p. 190] that for any primitive Pythagorean triple, there exists a unique pair (p, q) of positive integers such that $0 < q < p$, $\gcd(p, q) = 1$, $p - q$ is odd and

$$a = p^2 - q^2, \\ b = 2pq, \\ c = p^2 + q^2.$$

A specific family of Pythagorean triples is the so-called

twin Pythagorean triples or $(k+1, k)$ -family, where $p = k+1$ and $q = k$.

Setting $\gamma := p + qi$, we have on the one hand

$$\alpha = \gamma \cdot \gamma, \quad (2)$$

and on the other hand

$$c = \gamma \cdot \bar{\gamma}. \quad (3)$$

First, γ is neither divisible by a rational integer because p and q are coprime, nor divisible by a unit because $p - q$ is odd. Second, we have $\gcd(\gamma, \bar{\gamma}) = 1$ because if we denote $\gamma = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$, we have $\bar{\gamma} = \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 \dots \bar{\pi}_n$ and thus no factor of γ is also a factor of $\bar{\gamma}$. As a consequence, since γ divides both α and c , we have

$$\gcd(\alpha, c) = \gamma. \quad (4)$$

3.2. Discretization

For any $\kappa = u + iv$, let the *discretization cell* of κ be defined as follows :

$$D(\kappa) = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \begin{cases} u - 1/2 \leq (u+x) < u + 1/2 \\ v - 1/2 \leq (v+y) < v + 1/2 \end{cases} \right\}.$$

Geometrically, the discretization cell is an isothetic unit square around an integer point (see Fig. 1).

The *rounding function* is now defined as a function $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ such that $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, $[z]$ is the unique Gaussian integer such that $z \in D([z])$.

Let us denote by $[r_\alpha]$ the composition of the Euclidean rotation r_α and of the rounding function $[\cdot]$, i.e.

$$\begin{aligned} [r_\alpha] : \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{Z}[i] \\ \forall \kappa \in \mathbb{Z}[i], [r_\alpha](\kappa) &= \left\lfloor \frac{\kappa \cdot \alpha}{\sqrt{N\alpha}} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (5)$$

The goal of the next section is to prove the following theorem :

Theorem 1 The discretized rotation $[r_\alpha]$ is bijective iff $\alpha = (k+1) + ki$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

This result is equivalent to Nouvel and Remila's one [NR05]. However, in the following section, we prove this theorem using arithmetical and geometrical properties of Gaussian integers.

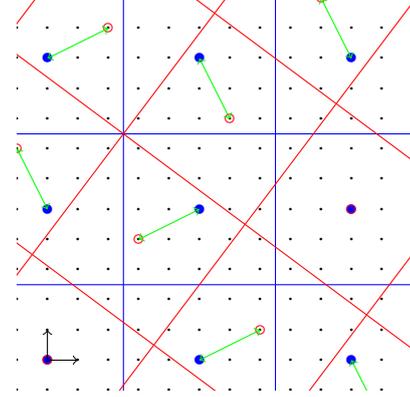
4. Main result

Until now, we divide $\kappa \cdot \alpha$ by $\sqrt{N\alpha} = c$ and then we consider the result with respect to the discretization cells of the integer lattice \mathbb{Z}^2 (Eq. 5). In this section, we do not divide $\kappa \cdot \alpha$ by c , but we consider the result with respect to the discretization cells of the scaled lattice $c\mathbb{Z}^2$ (see Fig. 3). In this framework, we introduce the map $s_{\alpha,c}$ defined as follows :

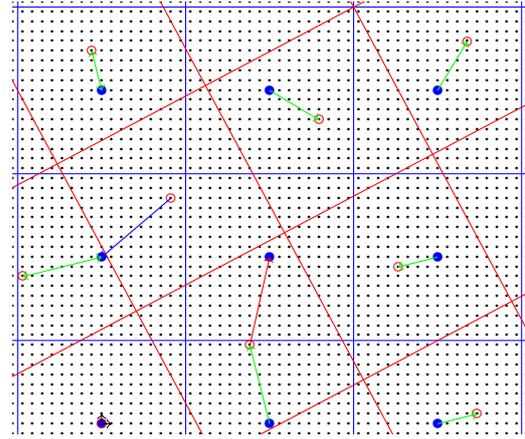
$$\begin{aligned} s_{\alpha,c} : \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{Z}[i] \\ \forall (\kappa, \lambda) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i], s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda) &:= \kappa \cdot \alpha - \lambda \cdot c. \end{aligned} \quad (6)$$

4.1. Approach

The idea is to compare the points of the lattice $\mathbb{Z}(a, b) + \mathbb{Z}(-b, a)$ (i.e. the images of $\kappa \cdot \alpha$, $\kappa \in \mathbb{Z}[i]$, in red, Fig. 3) to the lattice $c\mathbb{Z}$ (i.e. the images of $\lambda \cdot c$, $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, in blue Fig. 3). However, instead of comparing any pair $(\kappa \cdot \alpha, \lambda \cdot c)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$, we focus either on pairs such that $\kappa \cdot \alpha \in cD(\lambda)$, or on pairs such that $\lambda \cdot c \in \alpha D(\kappa)$. Such pairs are depicted with arrows in Fig. 3.



(a)



(b)

Figure 3: In (a) (resp. (b)), discretization cells of the lattice $5\mathbb{Z}^2$ (resp. $17\mathbb{Z}^2$) are depicted in blue, whereas discretization cells of the lattice $\mathbb{Z}(3,4) + \mathbb{Z}(-4,3)$ (resp. $\mathbb{Z}(15,8) + \mathbb{Z}(-8,15)$) are depicted in red. In both subfigures, blue (resp. red) arrows associate every red (resp. blue) point to the center of the blue (resp. red) discretization cell it belongs to. We use green for arrows that must be both blue and red.

Indeed, for all $\kappa \in \mathbb{Z}[i]$, the proposition $\lambda = [r_\alpha(\kappa)]$, i.e. $\lambda \in D(\kappa \cdot \alpha / c)$, is equivalent to the proposition $\lambda \cdot c \in cD(\kappa \cdot \alpha)$, which is equivalent to the proposition

$$s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda) \in cD(0).$$

Similarly, for all $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$, the proposition $\kappa = [r_c(\lambda)]$ is equivalent to the proposition

$$s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda) \in \alpha D(0).$$

Hence, we focus now on possible values of $s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda)$ that belong to $cD(0)$ or $\alpha D(0)$.

4.2. (Reduced) sets of remainders

Since $\gcd(\alpha, c) = \gamma$ due to Eq. 4, γ divides α and c . Furthermore, for all $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$, γ also divides $s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda)$. Thus, we have :

$$\forall(\kappa, \lambda) \in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i], s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda) = \gamma s_{\gamma, \bar{\gamma}}(\kappa, \lambda). \quad (7)$$

Since $\gcd(\gamma, \bar{\gamma}) = 1$ and from Bézout's identity, there exists a family of solutions $\{(\kappa_0 + \tau\bar{\gamma}, \lambda_0 + \tau\gamma)\}$, $\tau \in \mathbb{Z}[i]$, to the equation

$$s_{\gamma, \bar{\gamma}}(\kappa, \lambda) = \kappa \cdot \gamma - \lambda \cdot \bar{\gamma} = 1. \quad (8)$$

We can conclude that for all $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}[i]$, $s_{\gamma, \bar{\gamma}}(\kappa, \lambda)$ can have any possible values, whereas multiples of γ are the only possible values of $s_{\alpha,c}(\kappa, \lambda)$.

Let $S_{\bar{\gamma}}$ (resp. S_{γ}) be the reduced set of remainders defined such that $S_{\bar{\gamma}} = \{\rho \in \mathbb{Z}[i] \mid \rho \in \bar{\gamma}D(0)\}$ (resp. $S_{\gamma} = \{\rho \in \mathbb{Z}[i] \mid \rho \in \gamma D(0)\}$). As illustrated in Fig. 4, these two sets are two sets of integer points lying into two different squares. As illustrated in Fig. 5, there is no loss of generality to compare these reduced sets.

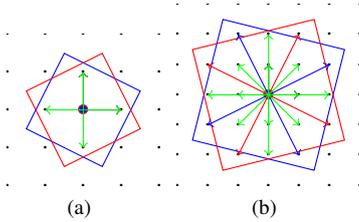


Figure 4: In (a), the reduced sets of remainders S_{2+i} and S_{2-i} . In (b), the reduced sets of remainders S_{4+i} and S_{4-i} . Note that $S_{2+i} = S_{2-i}$ but $S_{4+i} \neq S_{4-i}$.

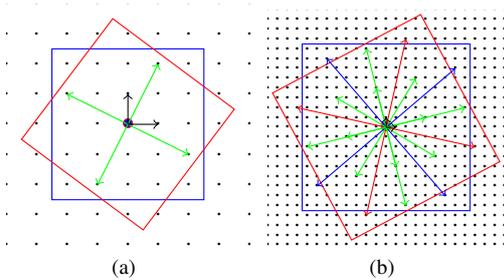


Figure 5: In (a), the sets of multiples of $(2+i)$ that belong to $(3+4i)D(0)$ and $5D(0)$. In (b), the sets of multiples of $(4+i)$ that belong to $(15+8i)D(0)$ and $17D(0)$.

It remains to compare the two reduced sets of remainders $S_{\bar{\gamma}}$ and S_{γ} , because the discretized rotation $[r_{\alpha}]$ is bijective iff $S_{\bar{\gamma}} = S_{\gamma}$.

4.3. Geometry of the reduced sets of remainders

We first show that $S_{\bar{\gamma}} \neq S_{\gamma}$ if $p > q + 1$ (i). Then, we show that $S_{\bar{\gamma}} = S_{\gamma}$ if $p = q + 1$ (ii).

To show (i), we exhibit a Gaussian integer that belongs to

S_{γ} but not to $S_{\bar{\gamma}}$ if $p > q + 1$. Without loss of generality, we multiply everything by $(1+i)$ so that the vertices of the discretization cells $(1+i)\gamma D(0)$ and $(1+i)\bar{\gamma}D(0)$ are Gaussian integers (see Fig. 6). Let ζ be equal to $\gamma - 1 = (p-1) + qi$. It is easy to see that $\zeta \in (1+i)\gamma D(0)$. We now want to show that it does not belong to $(1+i)\bar{\gamma}D(0)$ because

$$(p+q)(p-1) + (p-q)(q-1) - p^2 - q^2 > 0, \quad (9)$$

i.e. $i\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ and ζ are counter-clockwise oriented.

Developing Eq. 9 we get

$$2q(p-q) - p - q > 0.$$

If we write $p = q + e$, we obtain :

$$e > \frac{2q}{2q-1},$$

which is always true if $q > 1$ and $e > 1$ or if $q = 1$ and $e > 2$.

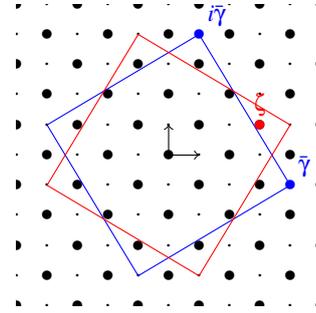


Figure 6: Example for $\gamma = 4 + i$. The discretization cells $(1+i)\gamma D(0)$ and $(1+i)\bar{\gamma}D(0)$ are respectively depicted with red and blue. The images of $i\bar{\gamma}$ and $\bar{\gamma}$ are depicted with blue dots, whereas $\zeta = \gamma - 1$ is depicted with a red dot. These three points are counter-clockwise oriented, which means that $S_{\bar{\gamma}} \neq S_{\gamma}$ for the pair $p = 4$ and $q = 1$.

To show (ii), it is enough to see that if $p = q + 1$, the boundaries of the discretization cells $\gamma D(0)$ and $\bar{\gamma}D(0)$ lie between two consecutive L_1 balls of integral radius q and $p = q + 1$, which means that $S_{\bar{\gamma}} = S_{\gamma}$ (see Fig. 4).

From (i) and (ii), we finally have theorem 1.

Références

[HW79] HARDY G. H., WRIGHT E. M. : *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1979.
 [NR05] NOUVEL B., RÉMILA E. : Characterization of bijective discretized rotations. In *Combinatorial Image Analysis*, Klette R., Žunić J., (Eds.), vol. 3322 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 248–259.

Une généralisation du *bien-composé* à la dimension n

Nicolas Boutry^{1,2}, Thierry Géraud¹ et Laurent Najman²

¹EPITA Research and Development Laboratory (LRDE)

²Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

Résumé

The notion of well-composedness has been introduced by Latecki in 1995 for 2D sets and images and for 3D sets in 1997. Well-composed binary digital images enjoy important topological properties; in addition, many algorithms can take advantage from these topological properties. Up to now, well-composedness has not been studied in dimension n , with $n > 3$. In the presented work, we extend the characterizations of well-composed sets and images to any dimension. We also prove the fundamental theorem of equivalence of the connectivities for a well-composed set.

La notion de bien-composé a été introduite par Latecki en 1995 pour les ensembles et les images 2D et pour les ensembles 3D en 1997. Les images binaires bien-composées disposent d'importantes propriétés topologiques. De plus, de nombreux algorithmes peuvent tirer avantage de ces propriétés topologiques. Jusqu'à maintenant, la notion de bien-composé n'a pas été étudiée en dimension n , avec $n > 3$. Dans le travail présenté ici, nous démontrons le théorème fondamental de l'équivalence des connexités pour un ensemble bien-composé, puis nous généralisons la caractérisation des ensembles et des images bien-composés à la dimension n .

Mots clé : bien-composé, images nD, topologie digitale

1. Introduction

Une image qui n'est pas bien-composée peut impliquer des paradoxes de connexité [KR89], [RL66], [LER95]. De plus, le théorème de séparation de Jordan, expliquant qu'une courbe simple fermée (respectivement une surface simple fermée) sépare un plan (respectivement un espace) en deux composantes connexes disjointes, n'est plus exact dans les espaces discrets usuels. À l'inverse, une image qui est bien-composée ne présente plus ce paradoxe, car ses connexités sont alors toutes équivalentes [Ros70], [TASG11]. Alors le théorème de Jordan est à nouveau satisfait [LER95]. De plus, les images bien-composées permettent des algorithmes d'amincissement simplifiés [MAM04], rendent la caractéristique d'Euler localement calculable [Lat97], simplifient les structures de graphes résultant des algorithmes de squelettisation [LER95], et simplifient certains algorithmes de marching cubes [TASG11]. Sous certaines contraintes de régularité, la notion de bien-composé est préservée par transformation rigide [NPKT14].

Un dernier point, celui-ci représentant notre principal objectif, est le suivant : les images bien-composées assurent que l'arbre des formes [Gér13] est bien défini [NG13]. L'algorithme permettant de calculer l'arbre des formes se

trouve dans [GCCN13] et est en temps quasi-linéaire. Une introduction à l'arbre des formes en milieu continu peut être trouvée dans [CM09].

Après un court état de l'art sur la notion de bien-composé, nous proposerons une généralisation à la dimension n des caractérisations du bien-composé. Aussi, nous détaillerons une propriété très forte des ensembles bien-composés : leurs connexités sont équivalentes.

2. Etat de l'art

Commençons par un rappel de la définition du bien-composé en dimension 2 [LER95].

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ un ensemble. X est dit *bien-composé* ssi X est localement 4-connexe[†].

On rappelle que la *fonction caractéristique* d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est la fonction binaire $\xi_X : \mathbb{Z}^n \mapsto \{0, 1\}$ définie telle

[†]. Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est *localement 4-connexe* ssi $\forall z \in X, \mathcal{N}_8(z) \cap X$ est une 4-composante

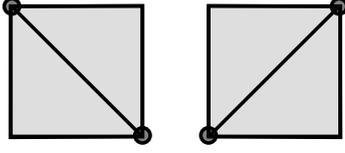


Figure 1: Configurations critiques possibles en dimension 2.

$$\text{que } \xi_X(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi nous pouvons introduire le bien-composé pour les images binaires [LER95].

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ un ensemble. X est dit *bien-composé* ssi l'image de sa fonction caractéristique ξ_X ne contient pas les configurations critiques $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Des exemples de configurations critiques sont représentés sur la figure 1.

Latecki a alors introduit les notions d'analogie continu et de contour de l'analogie continu [Lat97] de façon à pouvoir étendre ses définitions du bien-composé à la 3D.

L'*analogie continu* $\text{CA}(z)$ d'un point $z \in \mathbb{Z}^3$ est le cube unitaire fermé centré en ce point z et dont les faces sont parallèles aux plans des coordonnées. L'*analogie continu d'un ensemble* $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est défini comme étant $\text{CA}(X) = \bigcup \{ \text{CA}(x) \mid x \in X \}$. Aussi, le *contour de l'analogie continu* d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est noté $\text{bdCA}(X)$ et est défini comme étant l'union de l'ensemble des faces fermées qui sont à la fois face d'un cube étant dans $\text{CA}(X)$ et face d'un cube n'étant pas dans $\text{CA}(X)$.

Alors, soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 . X est dit *bien-composé* [Lat97] si chacune des composantes connexes du contour de son analogue continu $\text{bdCA}(X)$ est localement homéomorphe à la sphère S^2 .

Ceci amena à la définition équivalente suivante, basée à nouveau sur les configurations critiques [Lat97].

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 . X est dit *bien-composé* ssi l'image de sa fonction caractéristique ξ_X ne contient pas de configurations critiques (modulo les symétries axiales et les rotations) suivantes : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, le fait qu'un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ soit bien-composé implique qu'il soit localement $2n$ -connexe mais l'inverse n'est pas vrai [BGN14], comme le montre l'ensemble dont l'image de la fonction caractéristique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Généralisation du bien-composé à la dimension n

3.1. Rappels de quelques notions

Dans la suite, nous supposons que $\mathbb{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ est une base orthonormée de \mathbb{Z}^n .

Rappelons les notions de [BGN14] qui vont nous être utiles.

Soit z un point dans \mathbb{Z}^n et $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une sous-famille de \mathbb{B} . Nous définissons le *bloc associé au couple* (z, \mathcal{F}) dans \mathbb{Z}^n de la façon suivante :

$$S(z, \mathcal{F}) = \{z + \sum_{j=1}^{\text{Card}(\mathcal{F})} \lambda_j \cdot f_j \mid \lambda_j \in \{0, 1\}, \forall j \in [1, \text{Card}(\mathcal{F})]\}.$$

Nous dirons qu'un bloc est *de dimension k dans \mathbb{Z}^n* ssi ce dernier est associé à une famille de vecteurs $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}$ de dimension k , et nous le noterons S_k .

L'*ensemble des blocs inclus dans un sous-ensemble* $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^n$ est noté :

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}) = \{S(z, \mathcal{F}) \mid z \in \mathbb{Z}^n, \mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}, S(z, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{E}\}.$$

Soit S_k un bloc de dimension $k \in [1, n]$ dans \mathbb{Z}^n . L'*antagoniste d'un point* $z \in S_k$ dans S_k est le point $\text{antag}_{S_k}(z) \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$\text{antag}_{S_k}(z) = \{z' \in S_k \mid \|z' - z\|_2 = \max_{z'' \in S_k} \|z'' - z\|_2\}.$$

De plus, soient z, z' deux points $(3^n - 1)$ -adjacents dans \mathbb{Z}^n , alors on dénotera par $\mathcal{B}(z, z')$ le plus petit bloc (au sens de l'inclusion) dans \mathbb{Z}^n contenant le couple $\{z, z'\}$.

Notez que l'antagoniste du point p dans un bloc S_k de dimension $k \in [1, n]$ existe et est unique.

3.2. Configurations critiques et bien-composé

Nous pouvons désormais introduire la notion de configuration critique en dimension n .

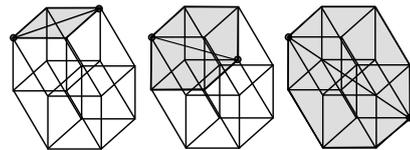


Figure 2: Exemples de configurations critiques 2D, 3D, et 4D dans un espace de dimension 4.

Définition 1 (Configurations critiques dans \mathbb{Z}^n) Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . Nous dirons que X contient une *configuration critique* ssi il existe un bloc $S_k \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}^n)$, $k \in [2, n]$, et un point $p \in S_k$ tel que $X \cap S_k = \{p, \text{antag}_{S_k}(p)\}$, ou tel que $X^c \cap S_k = \{p, \text{antag}_{S_k}(p)\}$. Dans le premier cas, nous dirons que $X \cap S_k$ est une *configuration critique primaire*, et dans le deuxième cas que $X \cap S_k$ est une *configuration critique secondaire*.

Des exemples de configurations critiques dans un espace de dimension 4 sont représentés dans la figure 2.

Définition 2 (Bien-composé dans \mathbb{Z}^n) Soit X un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n . Nous dirons que X est *bien-composé* ssi il ne contient pas de configurations critiques.

Nous noterons que $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est bien-composé ssi X^c est bien-composé.

3.3. Caractérisation du bien-composé pour les ensembles en dimension n

Introduisons maintenant notre caractérisation du bien-composé à base de $2n$ -chemins.

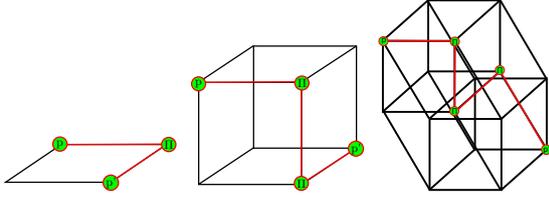


Figure 3: Pour tout ensemble bien-composé $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, lorsqu'un point p et son antagoniste p' sont tous deux dans X , alors ils sont tous deux connectés par un $2n$ -chemin π inclus dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$.

Théorème 1 (Caractérisation des ensembles bien-composés en dimension n) Soit X un ensemble dans \mathbb{Z}^n . Alors X est bien-composé ssi pour tout couple d'antagonistes (p, p') qui est dans X (respectivement dans X^c), il existe un $2n$ -chemin dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$ (respectivement dans $X^c \cap \mathcal{B}(p, p')$) les connectant.

Ce théorème est détaillé dans la figure 3.

Corollaire 1 (Equivalence des connexités dans les ensembles bien-composés) Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ un ensemble bien-composé. Soient p et p' deux points de X tels qu'ils sont connectés par un $(3^n - 1)$ -chemin dans X , alors il existe aussi un $2n$ -chemin dans X joignant p et p' . Autrement dit, les connexités d'un ensemble bien-composé sont équivalentes, i.e., l'ensemble de ses composantes connexes est le même quelque soit la connexité choisie.

4. Caractérisation des images bien-composées

Nous rappellerons la notion de coupes inférieures et supérieures présentées dans [GCCN13], cela afin de pouvoir définir ce que la notion de bien-composé représente pour une image.

4.1. Définition des coupes d'une image

Définition 3 (Coupes d'une image en dimension n) Soient $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} [u > \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) > \lambda\}, \\ [u < \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) < \lambda\}, \\ [u \geq \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \geq \lambda\}, \\ [u \leq \lambda] &= \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \leq \lambda\}, \\ [u = \lambda] &= [u \leq \lambda] \cap [u \geq \lambda]. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont respectivement dénommés *coupe supérieure stricte*, *coupe inférieure stricte*, *coupe supérieure large*, *coupe inférieure large*, et *coupes d'isoniveau*.

Définition 4 (Images binaires nD bien-composées [Gér13])

Soit $u_{bin} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \{0, 1\}$ une image binaire. u_{bin} est dite bien-composée ssi les ensembles $[u_{bin} = 1]$ et $[u_{bin} = 0]$ sont bien-composés.

Définition 5 (Images réelles nD bien-composées [Gér13])

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Nous dirons que u est *bien-composée* ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles $[u \leq \lambda]$, $[u \geq \lambda]$, $[u < \lambda]$ et $[u > \lambda]$ sont bien-composés.

4.2. Quelques lemmes utiles

Nous présentons ici quelques lemmes qui nous seront très utiles par la suite, en particulier pour montrer à quel point il peut être important que le domaine sur lequel nos images sont définies soient des hyperrectangles, et en quoi cela intervient dans la notion de bien-composé.

Lemme 1 (Images bien-composées et finitude de leur domaine de définition)

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle définie sur un domaine \mathcal{D} fini. Alors u est bien-composé sur \mathcal{D} ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $[u \leq \lambda]$ et $[u > \lambda]$ sont tous deux bien-composés (ou de manière équivalente ssi $[u \geq \lambda]$ et $[u < \lambda]$ sont tous deux bien-composés).

Soit une suite de n intervalles $\mathcal{I} = (I_1, \dots, I_n)$ dans \mathbb{Z} . Alors l'*hyperrectangle* H associé à \mathcal{I} est le produit cartésien $\otimes_{i=1}^n I_i$. H est dit *borné* ssi tous ses intervalles associés sont bornés dans \mathbb{Z} .

Lemme 2 (Une particularité des hyperrectangles bornés)

Soit H un hyperrectangle borné dans \mathbb{Z}^n avec $n \geq 2$ fini. Soit alors deux ensembles X et Y formant une partition de H . Alors X est bien-composé ssi Y est bien-composé.

Désormais, nous supposons que \mathcal{D} est un hyperrectangle borné dans \mathbb{Z}^n , avec $n \geq 1$ fini.

Lemme 3 (Image réelle définie sur un hyperrectangle borné en dimension finie) Soit $u : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Alors u est bien-composée ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la coupe $[u \leq \lambda]$ est bien-composée (ou de façon équivalente ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la coupe $[u \geq \lambda]$ est bien-composée).

Passons maintenant à la caractérisation du bien-composé, la définition étant posée.

4.3. Caractérisation du bien-composé pour les images réelles nD

Rappelons la caractérisation des images bien-composées 2D de Latecki de 1995 [LER95] : une image réelle $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est bien-composée ssi pour tout bloc S_2 tel que $u|_{S_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les intervalles associés \ddagger $\text{intvl}(a, d)$ et $\text{intvl}(b, c)$ vérifient la relation $\text{intvl}(a, d) \cap \text{intvl}(b, c) \neq \emptyset$.

Rappelons aussi que l'opérateur $\text{span} : E \subseteq \mathbb{Z} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ est défini de la façon suivante : $\text{span}\{E\} = [\min(E), \max(E)]$.

En 2014, dans [BGN14], nous avons alors proposé une extension de cette caractérisation des images réelles à la 3D de la façon suivante : soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^3 \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. Alors u est bien-composée sur \mathcal{D} ssi pour tout bloc $S_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, avec $u|_{S_3} = \begin{pmatrix} c & d & a & b \\ g & h & e & f \end{pmatrix}$, les relations suivantes (voir la figure 4) sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \text{intvl}(a, d) \cap \text{intvl}(b, c) &\neq \emptyset & (P1) \\ \text{intvl}(e, h) \cap \text{intvl}(g, f) &\neq \emptyset & (P2) \\ \text{intvl}(a, f) \cap \text{intvl}(b, e) &\neq \emptyset & (P3) \\ \text{intvl}(c, h) \cap \text{intvl}(g, d) &\neq \emptyset & (P4) \\ \text{intvl}(a, g) \cap \text{intvl}(e, c) &\neq \emptyset & (P5) \\ \text{intvl}(b, h) \cap \text{intvl}(f, d) &\neq \emptyset & (P6) \\ \text{intvl}(a, h) \cap \text{span}\{b, c, d, e, f, g\} &\neq \emptyset & (P7) \\ \text{intvl}(b, g) \cap \text{span}\{a, c, d, e, f, h\} &\neq \emptyset & (P8) \\ \text{intvl}(c, f) \cap \text{span}\{a, b, d, e, g, h\} &\neq \emptyset & (P9) \\ \text{intvl}(d, e) \cap \text{span}\{a, b, c, f, g, h\} &\neq \emptyset & (P10) \end{aligned}$$

La figure 5 expose les ensembles de points mis en jeu dans les relations ci-dessus.

Ainsi, nous proposons ici la caractérisation générale suivante pour des images de dimension n , $n \geq 2$ fini :

Théorème 2 (Caractérisation d'une image nD bien-composée) Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle où \mathcal{D} est un hyperrectangle borné dans un espace de dimension finie

\ddagger . L'intervalle associé au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est défini par $\text{intvl}(x, y) = [\min(x, y), \max(x, y)]$.

$n \geq 2$. u est bien-composée ssi $\forall k \in [2, n], \forall S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{D}), \forall p \in S_k, \forall p' \in S_k$ tel que $p' = \text{antag}_{S_k}(p)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\text{intvl}(u(p), u(p')) \cap \text{span}\{u(p'') \mid p'' \in S_k \setminus \{p, p'\}\} \neq \emptyset.$$

Notons par ailleurs que ce théorème établit le lien entre les images binaires bien-composées et les ensembles bien-composés.

5. Conclusion

Notre principale contribution consiste donc en une caractérisation du bien-composé pour les ensembles et pour les images réelles en dimension $n \geq 2$ finie, ainsi qu'en une propriété topologique essentielle des ensembles bien-composés : l'équivalence des connexités.

Références

- [BGN14] BOUTRY N., GÉRAUD T., NAJMAN L. : On making n -D images well-composed by a self-dual local interpolation. In *Discrete Geometry for Computer Imagery* (2014), vol. 8668 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 320–331.
- [CM09] CASELLES V., MONASSE P. : *Geometric Description of Images as Topographic Maps*, vol. 1984 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2009.
- [GCCN13] GÉRAUD T., CARLINET E., CROZET S., NAJMAN L. : A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of n -D images. In *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing – Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 98–110.
- [Gér13] GÉRAUD T. : Self-duality and discrete topology : Links between the morphological tree of shapes and well-composed gray-level images. Journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète, June 2013.
- [KR89] KONG T. Y., ROSENFELD A. : Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Vol. 48*, Num. 3 (décembre 1989), 357–393.
- [Lat97] LATECKI L. : 3D well-composed pictures. *Graphical Models and Image Processing. Vol. 59*, Num. 3 (May 1997), 164–172.
- [LER95] LATECKI L., ECKHARDT U., ROSENFELD A. : Well-composed sets. *Computer Vision and Image Understanding. Vol. 61*, Num. 1 (January 1995), 70–83.
- [MAM04] MARCHADIER J., ARQUÈS D., MICHELIN S. : Thinning grayscale well-composed images. *Pattern Recognition Letters. Vol. 25* (April 2004), 581–590.

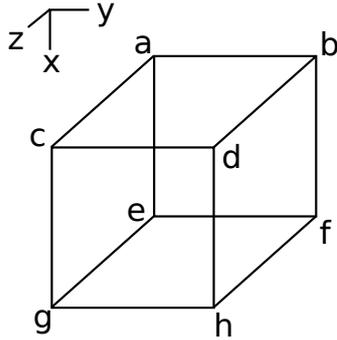


Figure 4: Restriction de u à un bloc S_3 .

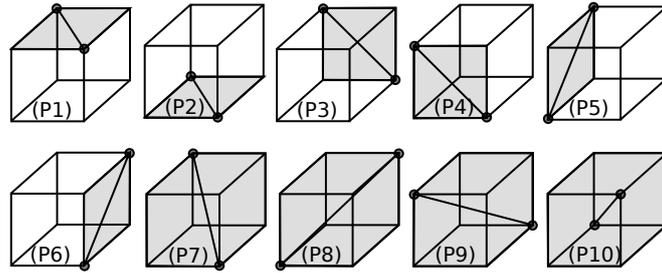


Figure 5: Les dix relations caractéristiques du bien-composé d'une image en niveaux de gris u restreinte à un bloc S_3 .

- [NG13] NAJMAN L., GÉRAUD T. : Discrete set-valued continuity and interpolation. In *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing – Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 37–48.
- [NPKT14] NGO P., PASSAT N., KENMOCHI Y., TALBOT H. : Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 23, Num. 2 (February 2014), 885–897.
- [RL66] ROSENFELD A., L. P. J. : Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the Association of Computing Machinery*. Vol. 13, Num. 4 (octobre 1966), 471–494.
- [Ros70] ROSENFELD A. : Connectivity in digital pictures. *Journal of the Association of Computing Machinery*. Vol. 17, Num. 1 (January 1970), 146–160.
- [TASG11] TUSTISON N., AVANTS B., SIQUEIRA M., GEE J. : Topological well-composedness and glamorous glue : A digital gluing algorithm for topologically constrained front propagation. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 20, Num. 6 (2011), 1756–1761.



UNE GÉNÉRALISATION DU BIEN-COMPOSÉ À LA DIMENSION n .

N. Boutry^{1,2}, Thierry Géraud¹, et Laurent Najman²

¹EPITA Research and Development Laboratory (LRDE)

²Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE



GRADUATE SCHOOL OF COMPUTER SCIENCE

UNIVERSITÉ

PARIS-EST

Résumé

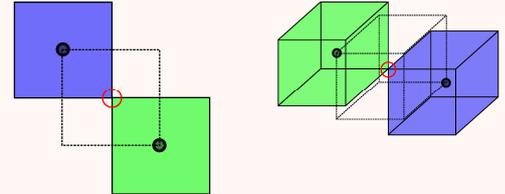
La notion de *bien-composé* a été introduite par Latecki en 1995 pour les ensembles et les images 2D et pour les ensembles 3D en 1997. Les images binaires bien-composées disposent d'importantes propriétés topologiques. De plus, de nombreux algorithmes peuvent tirer avantage de ces propriétés topologiques. Jusqu'à maintenant, la notion de bien-composé n'a pas été étudiée en dimension n , avec $n > 3$. Dans le travail présenté ici, nous généralisons la caractérisation des ensembles et des images bien-composés à la dimension n . Aussi nous démontrons le théorème fondamental de l'équivalence des connexités pour un ensemble bien-composé.

Etat de l'art sur les ensembles bien-composés [LER95], [Lat97], [Gér13]

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ est dit *bien-composé* ssi il est localement 4-connexe. De façon équivalente, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ est bien-composé ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension 2.

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est dit *bien-composé* ssi le contour de son analogue continu est localement homéomorphe à une sphère. De façon équivalente, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est bien-composé ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension 2 ou de dimension 3.

Finalement, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est dit *bien-composé* ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension k , $k \in [2, n]$.



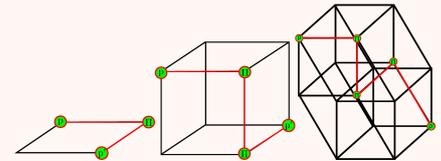
On propose une caractérisation pour identifier les ensembles bien-composés en dimension n

Théorème

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est bien-composé ssi pour tout couple d'antagonistes (p, p') tous deux dans X , il existe un $2n$ -chemin les joignant dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$ et si pour tout couple d'antagonistes (p, p') tous deux dans X^c , il existe un $2n$ -chemin les joignant dans $X^c \cap \mathcal{B}(p, p')$.

Corollaire

Pour tout ensemble bien-composé $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, toutes les connexités sont équivalentes.



État de l'art sur les images bien-composées [LER95], [Gér13], [BGN14]

Les coupes d'une image sont définies de la façon suivante :

$$[u > \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) > \lambda\}, [u < \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) < \lambda\}, [u \geq \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \geq \lambda\}, [u \leq \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \leq \lambda\}.$$

Une image $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est dite *bien-composée* ssi toutes ses coupes sont bien-composées.

Autrement dit, une image $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est bien-composée ssi en tout bloc $S \subseteq \mathcal{D}$, sa restriction y valant $u|_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a la relation :

$$\text{intvl}(a, d) \cap \text{intvl}(b, c) \neq \emptyset.$$

Théorème de caractérisation d'une image nD bien-composée

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. u est bien-composée ssi $\forall k \in [2, n], \forall S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{D}), \forall p \in S_k, \forall p' \in S_k$ tel que $p' = \text{antag}_{S_k}(p)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\text{intvl}(u(p), u(p')) \cap \text{span}\{u(p'') \mid p'' \in S_k \setminus \{p, p'\}\} \neq \emptyset.$$

[BGN14] BOUTRY N., GÉRAUD T., NAJMAN L.:

On making n -D images well-composed by a self-dual local interpolation.

In *Discrete Geometry for Computer Imagery* (2014), vol. 8668 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 320–331.

[Gér13] GÉRAUD T.:

Self-duality and discrete topology: Links between the morphological tree of shapes and well-composed gray-level images.

Journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète, June 2013.

[Lat97] LATECKI L.:

3D well-composed pictures.

Graphical Models and Image Processing. Vol. 59, Num. 3 (May 1997), 164–172.

[LER95] LATECKI L., ECKHARDT U., ROSENFELD A.:

Well-composed sets.

Computer Vision and Image Understanding. Vol. 61, Num. 1 (January 1995), 70–83.

Structuration du squelette en graphe pour une exploitation haut niveau par ses attributs

R. Youssef^{1,2,3} S. Sevestre-Ghalila^{1,3} C. Chappard⁴

¹CEA-LinkLab

²Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes

³Laboratoire COSIM de Sup'Com, Université de Carthage

⁴Laboratoire B2OA, Université Paris Diderot

Résumé

La squelettisation est une opération morphologique qui résume un objet par ses lignes médianes tout en préservant la topologie et la géométrie de l'image initiale. La squelettisation est utilisée dans différents domaines d'application tels que la biométrie comme étant une étape cruciale du processus d'appariement, ainsi que l'imagerie médicale pour la quantification de la micro-architecture de l'os. Dans le contexte d'appariement ou de quantification, il est possible d'exploiter les attributs d'un squelette pour extraire un ensemble de descripteurs structurels d'objets et d'accéder à une analyse haut niveau de l'image.

En effet, l'identification d'une personne grâce à son empreinte digitale ou le réseau veineux de sa main se fait grâce à l'appariement de minuties du squelette, composées de terminaisons de lignes et de bifurcations de crêtes. D'un autre côté, des études en imagerie biomédicale ont montré que les caractéristiques morphométriques de la micro-architecture osseuse constituent un indicateur de la qualité de l'os. La quantification de la micro-architecture de l'os rentre dans le champ d'application du projet ANR Voxelo qui a pour objectif de développer de nouvelles méthodes non invasives pour le diagnostic précoce de l'arthrose du genou. À cet effet, l'extraction du réseau trabéculaire par squelettisation est d'une grande importance pour analyser les paramètres morphologiques significatifs tels que la surface du squelette, le nombre de nœuds, d'extrémités, la longueur et la demi largeur de segments, etc.

Notre contribution vise à développer une solution pour l'extraction des attributs d'un squelette binaire ou en niveaux de gris et de les enregistrer sous un format hiérarchique ré-exploitable. Nous proposons de construire un graphe qui stocke les différents attributs d'un squelette d'empreinte ainsi que les paramètres morphométriques de l'os. Étant donné qu'un squelette se compose de segments, de nœuds et d'extrémités, il est judicieux d'utiliser un graphe pour représenter cet objet. La correspondance des segments avec les arêtes, des nœuds et extrémités avec les sommets d'un graphe est naturelle et intuitive. Dans ce travail, la structure de graphe se compose de structures points et segments. La structure point détermine la configuration topologique d'un pixel à partir de l'image du squelette binaire, le classe en crête, nœud ou extrémité et pointe sur ses voisins "objet" afin d'établir le lien entre les différentes composantes du graphe. Quant à la structure segment, elle est composée de points stockés dans une pile, d'une tête et d'une queue pointant sur le nœud ou l'extrémité qui suit, ainsi que d'autres attributs tels que la longueur euclidienne et le niveau de gris moyen. La construction du graphe est possible en identifiant en premier lieu la nature de chaque point et en procédant à un suivi de segment pour établir les liens entre les arêtes et les sommets. Les attributs ainsi trouvés sont finalement stockés dans un fichier CSV.

Cette solution s'applique à des squelettes binaires et en niveaux de gris, elle nous a permis d'évaluer notre méthode de squelettisation en niveaux de gris et d'implanter une procédure d'ébarbulage du squelette suivant le niveau de gris moyen et la longueur des barbules. En effet, d'après nos expérimentations, nous avons noté que la squelettisation en niveaux de gris est souvent sujette à l'apparition de barbules de faible contraste local. Une analyse des attributs extraits du squelette nous permet de déduire la longueur moyenne et le niveau de gris moyen de ces fausses terminaisons. On procède ainsi à un ébarbulage qui cible directement les segments concernés, les supprime et met à jour le fichier d'attributs.

Mots clé : squelettisation, morphologie mathématique, graphe, attributs

Tubular Structure Filtering by Ranking Orientation Responses of Path Operators

Odyssée Merveille^{1,2}, Hugues Talbot¹, Laurent Najman¹ and Nicolas Passat²

¹Université Paris-Est, LIGM, UPEMLV-ESIEE-CNRS, France

²Université de Reims Champagne-Ardenne, CReSTIC, France

Résumé

Thin objects in 3D volumes, for instance vascular networks in medical imaging or various kinds of fibres in materials science, have been of interest for some time to computer vision. Particularly, tubular objects are everywhere elongated in one principal direction – which varies spatially – and are thin in the other two perpendicular directions. Filters for detecting such structures use for instance an analysis of the three principal directions of the Hessian, which is a local feature. In this article, we present a low-level tubular structure detection filter. This filter relies on paths, which are semi-global features that avoid any blurring effect induced by scale-space convolution. More precisely, our filter is based on recently developed morphological path operators. These require sampling only in a few principal directions, are robust to noise and do not assume feature regularity. We show that by ranking the directional response of this operator, we are further able to efficiently distinguish between blob, thin planar and tubular structures. We validate this approach on several applications, both from a qualitative and a quantitative point of view, demonstrating an efficient response on tubular structures. This article is a summary of [MTNP14].

Mots clé : mathematical morphology, thin structures, path operators, 3D imaging.

1. Path Operators

Path operators were first introduced in 2001 by Buckley and Talbot [BT00]. Path operators include two dual operators: path opening and path closing. Without loss of generality, we consider in this paper bright objects on dark background and consequently focus our explanations on path opening.

A path opening is a classical morphological opening but instead of using only one structuring element, it uses a set of structuring elements called paths.

A path of size L is a set of L connected pixels on a graph G defining a global path orientation (see Fig. 1(a)). Consequently, a path opening with path length L preserves a structure if at least one path of length L can fit in this structure (see Fig. 1(b)).

Each path opening is associated to a graph G which defines the global orientation. In order to preserve thin elongated structures in all directions, a fusion of several path opening associated to different orientations is needed. A space discretization in 7 orientations is sufficient to cover all thin structures orientations (see Fig. 2).

According to that definition, a path opening preserves all thin structures in 3D images which means both tube-like and plane-like structures. We proposed a new filter, called

RORPO, based on path operators in order to preserve only tube-like structures in 3D images.

In the following, we will use the Robust Path Opening (RPO) of Cokelaer et al. [CTC12] which is a version of the classical path opening robust to noise.

2. RORPO

RORPO is based on a simple hypothesis : as a plane-like structure is elongated in one more direction than a tube-like structure, a plane-like structure should be detected in at least one more RPO orientation than a tube-like structure. Consequently, counting the number of RPO orientations detecting a voxel x gives information about the type of structure x belongs to.

We though proposed to pointwise rank the 7 RPO responses $R_{c_i}^L(I)(x)$ to obtain the 7 rank-filtered images $\Phi_i^L(I)$ (see Eq. ??). In particular, $\Phi_1^L(I)$ is the pointwise maximum filtered image which is the classical RPO filter.

$$\Phi_i^L(I)(x) = RF\{R_{c_i}^L(I)(x), i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket\} \quad (1)$$

We show experimentally that tubular structures are generally detected by at most 3 RPO orientations whereas plane-like structures are detected in at least 5 RPO orientations.

Based on these remarks, $\Phi_1^L(I)$ has a high response for both tubular and plane-like structures whereas $\Phi_4^L(I)$ only has a high response for plane-like structures.

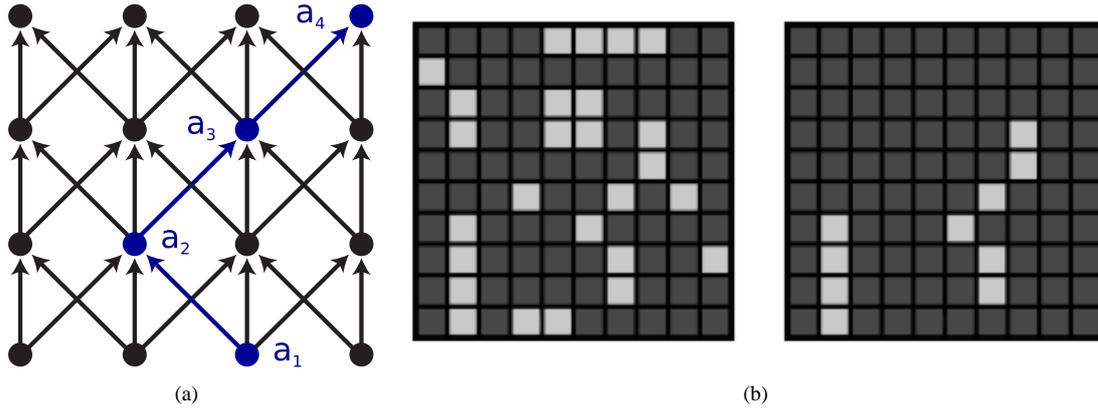


Figure 1: (a) A graph G (in black) defining a global vertical path orientation and a path (in blue) of length 4 pixels. (b) An example of a path opening of length 4 pixels. From left to right, the initial image and the result of the path opening. Only pixels belonging to a path of at least 4 pixels are kept. Paths are defined using the graph of figure (a).

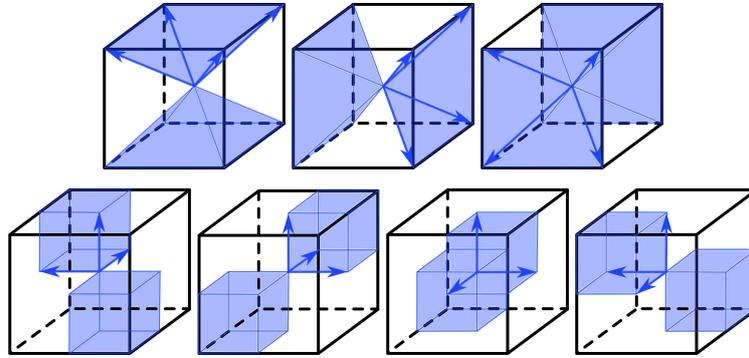


Figure 2: The 7 path opening orientations. From left to right, from top to bottom : vertical, horizontal, depth, diagonal 1 to 4 orientations. The center of the cube, each corner and the center of each face of the cube represent a voxel. The blue arrows are the neighborhood relations.

RORPO is then defined as the top hat between $\Phi_1^L(I)$ and $\Phi_4^L(I)$ see Eq. 2:

$$\Phi_r^L(I)(x) = \Phi_1^L(I) - \Phi_4^L(I) \quad (2)$$

3. Results

Synthetic Images

RORPO was applied on a synthetic image. This image contains an helix as a tubular structure with various diameters and orientations, a plane and blob-like structures (see Fig. 3(a)). Moreover, we compared RORPO with Frangi's Vesselness [FNVV98], which is the gold standard in tubular structure filtering, and a combination of RPO and a classical top hat. Results of the comparison are shown in Fig. 3.

Real Images

The same quantitative analysis was also performed on 15 CT of the heart from the Rotterdam repository [SMvW*09] with RORPO and Frangi's Vesselness only. Results are shown in Fig. 3. We observe that RORPO detects significantly less false positive than Frangi's Vesselness.

4. Conclusion

We proposed a new filter for 3D tubular structure enhancement based on path operators. Both qualitative and quantitative experiments show that RORPO outperformed the gold standard in tubular structure filtering, namely the Frangi's Vesselness.

RORPO is a low-level tubular structure filtering, consequently, it does not detect junction of tubular structures which are not tubular. Then, RORPO should be used as a feature among others in a vessel detection pipeline.

A complete 3D implementation is available at <http://path-openings.github.io/RORPO/>.

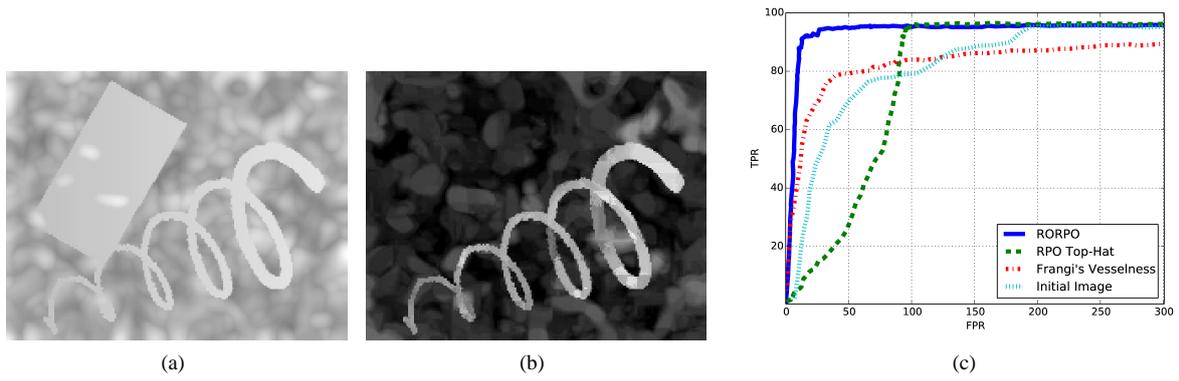


Figure 3: The initial image (a) and the result of the RORPO multiscale with length 40, 57, 74 and 90 (b). The ROC curves of the comparison (c).

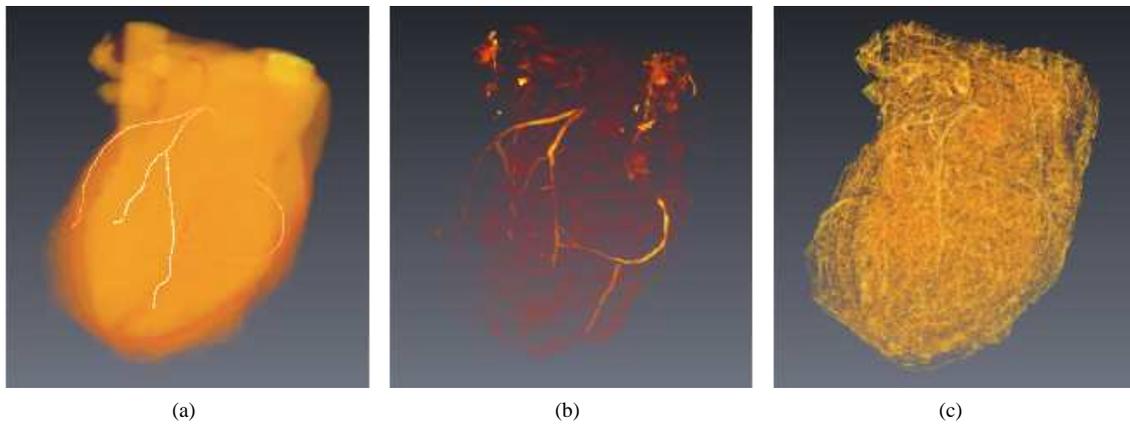


Figure 4: The initial image and the ground truth (a), the result of the RORPO multiscale (b) and the result of the Frangi's Vesselness (c). The mean and standard deviation of the ROC curves (d).

Références

- [BT00] BUCKLEY M., TALBOT H.: Flexible linear openings and closings. In *ISMM (2000)*, vol. 18 de *Computer Imaging and Vision*, Kluwer, pp. 109–118.
- [CTC12] COKELAER F., TALBOT H., CHANUSSOT J.: Efficient robust d-dimensional path operators. *J Sel Top Signal. Vol. 6* (2012), 830–839.
- [FNvV98] FRANGI A. F., NIESSEN W. J., VINCKEN K. L., VIERGEVER M. A.: Multiscale vessel enhancement filtering. In *MICCAI (1998)*, vol. 1496 de *LNCS*, Springer, pp. 130–137.
- [MTNP14] MERVEILLE O., TALBOT H., NAJMAN L., PASSAT N.: Tubular structure filtering by ranking orientation responses of path operators. In *Computer Vision – ECCV 2014 (2014)*, LNCS, Springer International Publishing, pp. 203–218.
- [SMvW*09] SCHAAP M., METZ C. T., VAN WALSUM T., VAN DER GIESSEN A. G., WEUSTINK A. C., MOLLET N. R. A., BAUER C., BOGUNOVIĆ H., CASTRO C., DENG X., DIKICI E., O'DONNELL T., FRENAY M., FRIMAN O., HERNÁNDEZ HOYOS M., KITSLAAR P. H., KRISSIAN K., KÜHNEL C., LUENGO-OROZ M. A., ORKISZ M., SMEDBY Ö., STYNER M., SZYMCZAK A., TEK H., WANG C., WARFIELD S. K., ZAMBAL S., ZHANG Y., KRESTIN G. P., NIESSEN W. J.: Standardized evaluation methodology and reference database for evaluating coronary artery centerline extraction algorithms. *Med Image Anal. Vol. 13* (2009), 701–714.

Tubular Structure Filtering by Ranking Orientation Responses of Path Operators

Introduction

Tubular objects, like vascular networks or fibres in materials science, have been of interest for some time in computer vision. Usually, tubular structure filtering uses an analysis of the three principal directions of the Hessian which is a local feature. We propose a low-level tubular structure detection filter based on paths, which are semi global features that avoid any blurring effect induced by scale-space convolution.

Context

3D Path Operators can filter thin objects, which means both tubular and plane-like structures. Our strategy for filtering only tubular structures derives from the simple observation of figure 1. A blob, a plane and a tubular structure in 3D can be distinguished by "counting" the number of responses of any oriented filter as path operators.

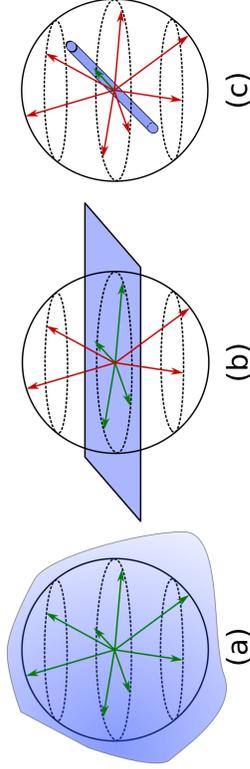
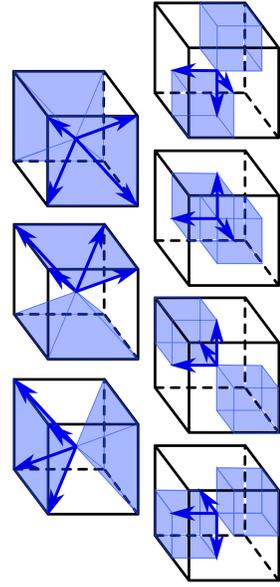


Figure 1 : When sampling orientations from a point, in an isotropic structure a.k.a a blob (a), oriented operators all respond nearly identically (green arrow). In a plane (b), some proportion respond positively. In a tube (c), only a few orientations respond.

Ranking Orientation Responses of Path Operators: RORPO

Hypothesis: Plane structures are detected in at least one more RPO orientation than tubular structures.

Figure 2 : The seven 3D orientations



Based on the orientations of figure 2, we proposed the RORPO operator:

$$RORPO = RPO_1 - RPO_i$$

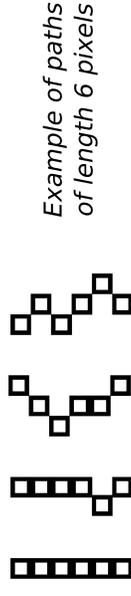
with RPO_1 : 1th ranked orientation (=RPO result)

RPO_i : ith ranked orientation

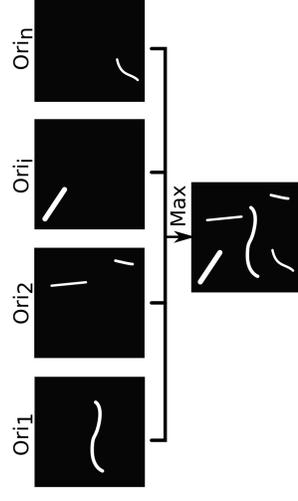
- We showed on synthetic images that RPO, with these orientations detects:
- Tubular structures in at most 3 orientations
 - Plane structures in at least 5 orientations

Previous Work: Path Operators

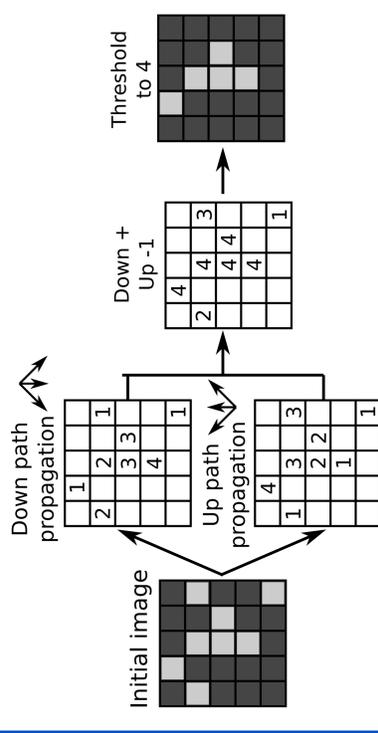
Definition: Morphological opening or closing which use as structuring element a set of oriented connected pixels of fixed length called paths.



Filtering tubular structures in all directions requires the fusion of RPO in several orientations.



Robust Path Opening (RPO): A version of Path Opening that is robust to noise.



Example of path propagation with a vertical orientation



Result of a 2D RPO (b) on an initial image (a)

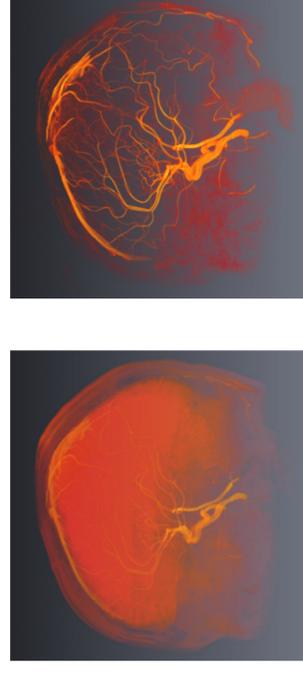
Results and Comparisons

Synthetic image



MIP of the initial image (a) and the RORPO result (b)

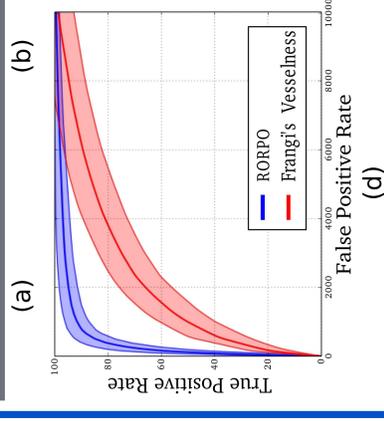
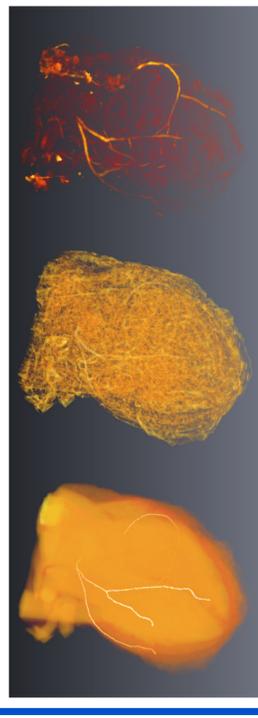
Brain MRI



Volume Rendering of the initial image (a) and the RORPO result (b)

Comparison with Frangi's Vesselness on Heart CT

Quantitative comparison with Frangi's Vesselness (gold standard in tubular filtering) on 15 patients of the Rotterdam repository (Challenge MICCAI 2012)



Volume Rendering of (a) Initial image and ground truth (b) Frangi's result (c) RORPO result (d) ROC curves on 15 Patients

Traitement d'images multivariées avec l'arbre des formes

Edwin Carlinet et Thierry Géraud

Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE)
Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

Résumé

The Tree of Shapes (ToS) is a morphological tree that provides an high-level hierarchical, self-dual and contrast invariant representation of the image suitable for many image processing tasks. When dealing with color images, one cannot use the Tree of Shapes because its definition is ill-formed on multivariate data. Common workarounds such as marginal processing, or imposing a total order on data are not satisfactory and yield many problems (color artifacts, loss of invariances...). In this paper, we highlight the need for a self-dual and contrast invariant representation of the image and we provide a method that builds a single Tree of Shapes by merging the shapes computed marginally and preserving the most important properties of the ToS. This method does not try to impose an arbitrary total ordering on values but uses only the inclusion relationship between shapes and the merging strategy works in a shape space. Eventually, we show the relevance of our method and our structure through image simplification and interactive segmentation.

L'Arbre des Formes (ToS) est un arbre morphologique qui fournit une représentation hiérarchique de l'image auto-duale et invariante par changement de contraste. De ce fait, il est adapté à de nombreuses applications de traitement d'images. Néanmoins, on se heurte à des problèmes avec l'Arbre des Formes lorsqu'on doit traiter des images couleurs car sa définition tient uniquement en niveaux de gris. Les solutions les plus courantes sont alors d'effectuer un traitement composante par composante (marginal) ou d'imposer un ordre total. Ces solutions ne sont généralement pas satisfaisantes et font survenir des problèmes (des artefacts de couleur, des pertes de propriétés...) Dans cet article, nous insistons sur la nécessité d'une représentation à la fois auto-duale et invariante par changement de contraste et nous proposons une méthode qui construit un Arbre des Formes unique en fusionnant des formes issues des composantes marginales tout en préservant les propriétés intrinsèques de l'arbre. Cette méthode s'affranchit de tout relation d'ordre totale en utilisant uniquement la relation d'inclusion entre les formes et en effectuant une fusion dans l'espace des formes. Finalement, nous montrerons la pertinence de notre méthode et de la structure en les illustrant sur de la simplification d'images et de la segmentation interactive.

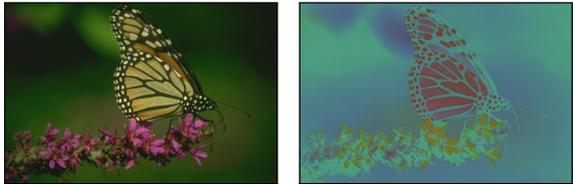
1. Introduction

L'arbre des formes [CCM99, CM09] est une représentation hiérarchique de l'image témoignant de l'inclusion de ses lignes de niveaux. L'efficacité de cette structure pour le traitement d'images réside dans ses propriétés. D'abord, c'est une représentation morphologique (donc invariante par changement de contraste) basée sur l'inclusion des composantes connexes de l'image obtenues à différents niveaux de seuillage. En conséquence, un filtrage basique de cet arbre est un filtre connexe, c'est-à-dire un filtre qui ne déplace pas les contours des objets mais se contente de supprimer ou préserver certains d'entre eux [SS95]. Ensuite, non seulement cette structure est invariante par

changement de contraste global mais elle l'est aussi *localement* [CMS05]. Cette propriété est très importante dans de nombreuses applications de vision par ordinateur où la robustesse au changement d'illumination est un véritable challenge, e.g. pour la mise en correspondance de scènes ou la reconnaissance d'objets. La figure 1d montre cette invariance en simulant un changement d'illumination directement avec l'arbre des formes, on a donc la même représentation arborescente sur cette image que sur l'image d'origine montrée sur la figure 1b. Enfin, au delà de son invariance au changement de contraste, l'arbre des formes est aussi une représentation auto-duale de l'image. Cette propriété est fondamentale dans un contexte où les



(a) *Changement et/ou inversion de contraste sur Lena.*



(b) *Image originale*

(c) *Changement et/ou inversion de contraste indépendant sur chaque canal.*



(d) *Changement de contraste local (simulation d'un niveau de l'arbre des formes)*
 (e) *Quelques "lignes de formes couleur".*

Figure 1: *Le besoin d'invariance au changement et inversion de contraste (a). Les trois images (b), (c), (d) ont le même arbre des formes dont les lignes de niveaux sont montrées sur (e).*

structures peuvent apparaître à la fois sur un fond plus clair ou plus foncé. C'est pourquoi les opérateurs auto-duaux sont particulièrement bien adaptés pour le traitement des images où l'organisation du contenu n'est pas connu a priori. Alors que des opérateurs morphologiques tentent d'être auto-duaux (e.g. les filtres séquentiels alternés) en combinant des filtres extensifs et non-extensifs, certains dépendent en fait de l'ordre d'application (i.e. de quel filtre est appliqué en premier). Les filtres auto-duaux ont la capacité de traiter

réellement de manière symétrique les objets foncés et clairs au même titre [Hei96, Soi05] (voir la figure 1c).

Malgré ces puissantes propriétés, l'arbre des formes est encore largement sous-exploité, même si quelques auteurs l'ont d'ores et déjà utilisé efficacement dans des applications de traitement d'images et de vision par ordinateur. Dans [DK01, BCIG07, XGN12, XGN13a], les auteurs utilisent une approche par optimisation d'énergie sur la hiérarchie de l'arbre des formes pour la simplification et la segmentation d'images en sélectionnant les lignes de niveaux significatives. D'autres applications incluent la segmentation de vaisseaux sanguins [XGN13b], le réglage d'images [CM09] et la mise en correspondance de scènes en étendant les MSER aux "Maximally Stable Shapes" [CM09] et aux "Tree-Based Morse Regions" [XGMN14].

Alors que l'arbre des formes est bien défini sur les images à niveaux de gris, cela se complique sur les données multivariées. En effet, comme la plupart des arbres morphologiques (e.g. le min et max-tree), l'arbre des formes repose sur une relation d'ordre sur les valeurs qui doit être totale. Dans le cas contraire, les composantes connexes de coupes inférieures et supérieures se chevauchent et l'arbre d'inclusion est mal formé. Pour résoudre ce problème, on s'est le plus souvent concentré à définir un ordre total sur les données multivariées. Cependant, de notre point de vue, le concept le plus important dans les arbres morphologiques reste l'inclusion des formes. Par conséquent, cet article introduit une nouvelle approche qui s'affranchit de la nécessité d'un ordre total mais essaye de construire un ensemble de formes qui ne se chevauchent pas à partir d'un ensemble de formes quelconque en se basant uniquement sur la relation d'inclusion.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section 2, on rappelle les principes de base à propos de l'arbre des formes et sa définition formelle. On revoit également les approches standard de la littérature pour créer des arbres morphologiques à partir des images multivariées. Dans la section 3, nous introduisons notre méthode pour construire un arbre des formes couleur en fusionnant des formes issues des arbres des formes marginaux. Dans la section 4, nous montrons finalement quelques applications pour mettre en avant la versatilité et le potentiel de l'arbre des formes couleur.

2. L'arbre des formes et les problèmes liés à la couleur

2.1. L'arbre des formes : définition et propriétés

Soit $u : \Omega \rightarrow E$, une image définie sur un domaine Ω et prenant ses valeurs dans E muni d'une relation d'ordre \leq . Les lignes de niveaux de u sont la collection des ensembles de points $\{x \mid u(x) = \lambda, \lambda \in E\}$. En utilisant la représentation de [GCCN13], on peut s'assurer que ces ensembles forment des courbes fermées lorsque

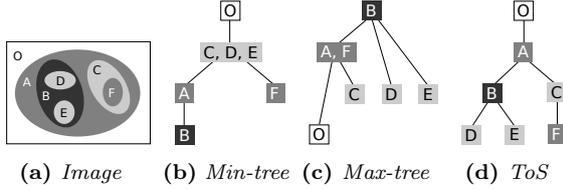


Figure 2: Une image (a), et ses arbres morphologiques de composantes (b) à (d).

\leq est un ordre total. En fait, l'ordre doit être total dû à la définition des lignes de niveaux en termes de contours de coupes inférieures ou supérieures. Soit $[u \leq \lambda]$ (resp. $[u \geq \lambda]$) une coupe inférieure (resp. supérieure) de u définie par $[u \leq \lambda] = \{x, u(x) \leq \lambda\}$. On note $\mathcal{CC}(X), X \in \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des composantes connexes de X . Si \leq est total, deux composantes connexes $X, Y \in \mathcal{CC}([u < \lambda])$ sont disjointes ou incluses. L'ensemble $\mathcal{CC}([u < \lambda])$ muni de la relation d'inclusion est un arbre appelé *min-tree* et son arbre dual, défini sur les coupes supérieures, est le *max-tree* (voir les figures 2b et 2c). Soit l'opérateur de bouchage de trou \mathcal{H} , on appelle une *forme* un élément de $\mathcal{S} = \mathcal{H}([u \leq \lambda]) \cup \mathcal{H}([u \geq \lambda])$. Si \leq est total, là encore deux formes seront disjointes ou incluses et donc la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) forme un arbre : l'*arbre des formes* (voir la figure 2d). Dans le reste de ce papier, par abus de notation, on considère implicitement la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) lorsqu'on écrit (\mathcal{S}, \subseteq) . Notons aussi que l'arbre des formes traduit à la fois l'inclusion des formes et l'inclusion des lignes de niveaux puisque celles-ci sont les frontières des formes. Enfin, sans perte de généralité, on considère $E = \mathbb{R}^n$ tout au long de ce papier et on notera u pour les images scalaires ($n = 1$) et \mathbf{u} pour les images multivariées.

2.2. Le problème des données multivariées : solutions standard et travaux connexes

Les définitions précédentes des lignes de niveaux (en termes d'ensemble d'iso-niveau ou en tant que contour de formes) sont toutes deux mal formées en présence d'un ordre partiel. En effet, les ensembles d'iso-niveau ne forment pas des courbes fermées et les formes issues des coupes inférieures et supérieures peuvent se chevaucher, i.e., (\mathcal{S}, \subseteq) forme un graphe. Un moyen largement utilisé mais peu acceptable de résoudre le problème est de traiter l'image en niveaux de gris uniquement (e.g. la luminance). Cette approche reste plausible si on prétend que l'information géométrique est principalement contenue par la luminance [CCM02]. Cependant, il n'est pas rare de rencontrer des images où les contours des objets n'existent qu'à travers la composante chromatique (notamment sur les images de document ou de synthèse). Ces exemples contredisent cette supposition et montrent que la chrominance contient également l'information géométrique (voir la figure 3b).



(a) Image d'origine u (b) Simplification sur une version en niveaux de gris de u (198 régions)



(c) Simplification avec un traitement marginal (123 + 141 + 136 régions) (d) Simplification avec notre approche (158 régions)

Figure 3: Les problèmes liés à la simplification avec les approches "standard" pour traiter la couleur. (b) montre le problème de fuite lorsque la luminance n'est suffisante pour obtenir complètement l'information géométrique. (c) montre le problème de fausses couleurs dues au traitement marginal. (d) Notre méthode récupère correctement le contenu principal de l'image sans introduire d'artefact visuel.

Une autre solution communément employée est le traitement de l'image canal par canal, puis la recombinaison des résultats individuels. Le traitement marginal est sujet au problème connu des fausses couleurs puisqu'il permet de créer des couleurs qui n'étaient pas présentes dans l'image d'origine. Les fausses couleurs peuvent être un problème ou pas (par exemple si les fausses couleurs sont suffisamment proches des couleurs d'origines pour ne pas être distinguées), mais dans le cas de la simplification, il produit des artefacts de couleurs indésirables comme montrés sur la figure 3c. Aussi, le traitement marginal produit au final plusieurs arbres (un pour chaque canal de l'image) alors que nous souhaitons obtenir une structure *unique* de l'image. Dans [CG14b], nous avons proposé des idées préliminaires sur la manière d'obtenir un arbre unique à partir de plusieurs arbres.

Puisque le problème des formes qui se chevauchent est dû à l'ordre partiel des couleurs, des auteurs ont tenté d'imposer arbitrairement un ordre ou un pré-ordre *total*. Ils diffèrent en le fait qu'un nœud de l'arbre puisse être associé à une ou plusieurs valeurs. La manière d'ordonner un espace multivarié a été largement étudiée pour étendre les opérateurs morphologiques. [Bar76] classe les méthodes en quatre groupes : les ordres marginaux (M-ordering), les or-

dres conditionnels (C-ordering), les ordres partiels (P-ordering) et les ordres réduits (R-ordering). Alors que la première classe mène à un ordre partiel, les trois autres donnent un ordre ou un préordre total. Les ordres conditionnels visent à organiser les vecteurs en donnant des priorités à certaines (ou toutes) composantes du vecteur. L'ordre lexicographique, bien connu, appartient à cette classe et est la méthode la plus commune pour étendre l'arbre des formes aux couleurs [CF00]. Les ordres réduits visent à projeter des données vectorielles sur un espace réel à travers une fonction de rang. Les fonctions de rang bien connues sont par exemple la norme l_1 , la luminance dans un espace couleur donné, ou la distance à un ensemble de couleurs de référence. Elles ont été appliquées dans [TW12, PLCS10, NP09] pour la compression d'image et pour la détection d'objets astronomiques en utilisant les min ou max-trees mais l'idée est transposable pour l'arbre des formes [CG14a]. Des stratégies plus avancées ont été conçues pour donner naissance à un ordre total plus "sensé" où celui-ci dépend du contenu de l'image. [VFA11, VFA12] utilisent l'apprentissage automatique pour obtenir un P-ordering basé sur le partitionnement de l'espace, puis établissent une distance entre ces regroupements. Dans [LCE*09], l'apprentissage de variétés est utilisé pour inférer une fonction de rang sur les couleurs et dans [LME05], un ordre total est calculé localement sur une fenêtre spatiale glissante. Une liste non-exhaustive pour inférer un ordre total sur les données multivariées peut être trouvée dans [AL07].

Une autre approche introduite par [PN09] utilise directement l'ordre partiel des valeurs et manipule la structure sous-jacente qui est un graphe. Le graphe des composantes est encore à l'état de développement mais a montré des résultats prometteurs dans le cadre de filtrage [NP13]. Néanmoins, le graphe des composantes fait face à un problème de complexité algorithmique qui oblige les auteurs à effectuer le filtrage localement. De ce fait, le graphe des composantes est à l'heure actuelle non adapté si l'on veut une représentation de l'image entière.

Dans [CG14b], nous avons introduit une nouvelle approche où, au lieu d'essayer d'imposer un ordre total sur les valeurs, nous calculons marginalement les arbres des formes et les fusionnons en un arbre unique. Le procédé de fusion ne dépend pas d'un ordre total sur les valeurs mais sur des propriétés calculées dans l'espace des formes. Néanmoins, la stratégie de fusion proposée dans ce papier souffre d'un manque de "cohérence" car elle fusionne ensemble des formes sans liaisons apparentes. Dans [CG14a], inspiré par le travail de [PN09], nous avons proposé le graphe des formes qui fusionne les arbres des formes marginaux en une seule structure et de façon efficace. Nous avons montré que cette structure avait un fort potentiel comparée aux approches standard qui imposent un ordre total. Cependant, la méthode construit un graphe, ce qui est une limitation puisque nous ne pouvons plus utiliser les outils fournis par l'état de l'art sur les arbres de

composantes (filtrage, détection d'objets, méthodes de segmentation...). Le travail présenté ici peut être vu comme la poursuite des idées introduites dans [CG14b] et [CG14a] puisque le graphe des formes est utilisé comme une représentation intermédiaire pour extraire un arbre unique depuis les formes issues des arbres des formes marginaux.

3. L'arbre des formes couleur

3.1. Contraintes et propriétés de l'arbre des formes couleur

Commençons d'abord par relâcher la définition de forme. Une forme X est une composante connexe de Ω sans trous (i.e. telle que $\mathcal{H}(X) = X$). Soit une famille d'ensemble de formes $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ où chaque élément $(\mathcal{S}_i, \subseteq)$ forme un arbre. On note $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_i$ l'ensemble initial de formes. Notons que (\mathcal{S}, \subseteq) ne forme généralement pas un arbre mais un graphe puisque des formes peuvent se chevaucher. On cherche à définir un nouvel ensemble de formes \mathcal{S}' tel que deux formes soient disjointes ou incluses. On ne se limite pas aux ensembles $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. En d'autres termes, on autorise la méthode à créer de nouvelles formes qui n'étaient pas présentes dans l'ensemble de formes d'origine. On note $T(\mathbf{u}) : \Omega^{\mathbb{R}^n} \rightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega)), \subseteq)$, le processus qui construit un arbre des formes $(\mathcal{S}', \subseteq)$ à partir d'une image $\mathbf{u} \in \Omega^{\mathbb{R}^n}$.

Plus formellement, on souhaite que la méthode T produise $(\mathcal{S}', \subseteq)$ avec les propriétés suivantes :

- (R1) La couverture du domaine $(\bigcup_{X \in \mathcal{S}'} X) = \Omega$ (tout point appartient à au moins une forme)
- (R2) Une structure arborescente $\forall X, Y \in \mathcal{S}'$, soit $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$ (deux formes sont disjointes ou incluses)

Et on impose également les contraintes suivantes :

- (R3) L'équivalence avec ToS scalaire. Si $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}_1\}$ alors $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_1$ (si l'image est scalaire, alors la méthode doit produire le même arbre que l'arbre des formes calculé sur l'image d'origine).
- (R4) Pour chaque forme $X \in \mathcal{S}$ telle que pour chaque autre forme $Y \in \mathcal{S}$, $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$ alors, $X \in \mathcal{S}'$ (une forme qui ne chevauche aucune autre forme doit exister dans l'arbre final).
- (R5) L'invariance par changement et inversion de contraste Une transformation ψ est dite morphologique (i.e. invariante par changement de contraste) si pour une fonction croissante $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\psi(u)) = \psi(g(u))$. De plus, la transformation est dite auto-duale si elle est invariante par complémentation $\mathcal{C}(u) = -u$ i.e. $\mathcal{C}(\psi(u)) = \psi(\mathcal{C}(u))$. Soit une fonction monotone $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$ ou $F(x) > F(y)$, ψ est à la fois auto-duale et invariante par changement de contraste si $F(\psi(u)) = \psi(F(u))$. L'arbre des formes est un support pour certains opérateurs morphologiques auto-duaux et une représentation T est dite auto-duale et morphologique

si $T(F(u)) = T(u)$. Pour l'extension au multivarié de cette propriété, notons \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions monotones, T est dit invariant par changement et inversion de contraste si pour $\mathbf{F} \in \mathcal{F}^n$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$, alors $T(\mathbf{F}(\mathbf{u})) = T(\mathbf{u})$.

3.2. Description de la méthode

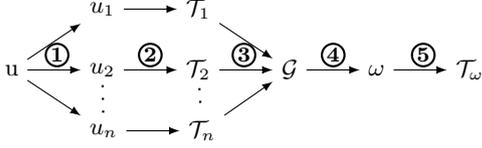


Figure 4: Les 5 étapes de la méthode proposée. (1) L'image d'entrée \mathbf{u} est décomposée en ses différentes composantes u_1, u_2, \dots, u_n , (2) l'arbre des formes est calculé sur chaque composante, (3) les arbres des formes sont fusionnés en une unique structure : le graphe des formes, (4) une image scalaire ω est calculée en utilisant la profondeur des nœuds auxquels les points appartiennent. (5) un arbre est calculé à partir de ω .

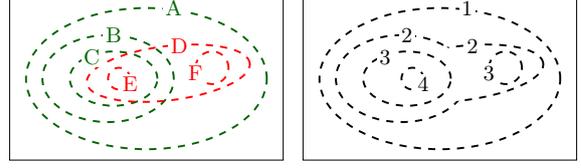
La méthode que nous proposons est un processus en 5 étapes (voir la figure 4). Tout d'abord, \mathbf{u} est décomposé en ses composantes individuelles u_1, u_2, \dots, u_n sur lesquelles on calcule les arbres des formes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ associés aux ensembles de formes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$. On note $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_i$, on appelle le graphe des formes \mathcal{G} la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) , i.e. c'est le graphe d'inclusion des toutes les formes issues de coupes marginales. Soit $\rho : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{N}$ un attribut de forme algébrique décroissant i.e. $\forall A, B \in \mathcal{S}, A \subset B \Rightarrow \rho(A) > \rho(B)$

Nous discuterons plus loin du choix de ρ en tant qu'attribut de sélection de forme ou d'attribut de fusion de formes. Un exemple d'un tel opérateur est l'attribut de profondeur. La profondeur d'une forme A de \mathcal{G} est la longueur du chemin le plus long de la racine vers A . ω Soit $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

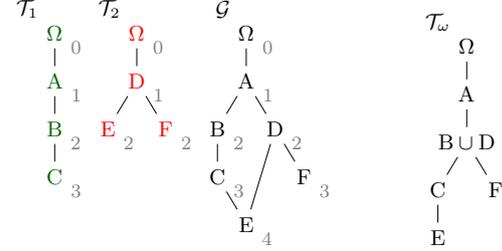
$$\omega(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(X) \quad (1)$$

ω est une image scalaire qui associe en chaque point de x , la profondeur de la forme la plus profonde qui le contient (voir les figures 5b et 5c) Soit $\mathbb{C} = \{CC([\omega \geq h]), h \in \mathbb{R}\}$. (\mathbb{C}, \subseteq) est en fait le max-tree de ω . Ce dernier pouvant donner lieu à des composantes avec des trous, on considère donc $\mathcal{S}' = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $(\mathcal{S}', \subseteq)$ pour l'arbre des formes final \mathcal{T}_ω (voir la figure 5d).

Intuition. On explique maintenant l'intuition de cette démarche. D'abord, nous commençons par calculer les arbres des formes marginaux de \mathbf{u} qui nous donnent un ensemble de formes initial. Les différents arbres (ensemble) fournissent une représentation de l'image d'origine et \mathbf{u} peut être reconstruite marginalement depuis ces arbres. Cependant, la manipulation simultanée des différents arbres est délicate et il manque



(a) Image originale u (2- canaux) et ses formes. (c) L'image ω construite depuis \mathcal{G}



(b) Les arbres des formes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et le graphe des formes. La profondeur apparaît en gris clair près des nœuds. (d) Le max-tree \mathcal{T}_f of ω marginaux $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et le graphe des formes.

Figure 5: Schéma illustrant le fonctionnement de la méthode

une information capitale : comment les formes d'un arbre donné sont liées (au sens de l'inclusion) aux formes des autres arbres. Le graphe \mathcal{G} n'est rien de plus que ces arbres fusionnés en une unique structure et ajoute la relation d'inclusion qui manquait précédemment. Par conséquence, \mathcal{G} est plus "riche" que $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ parce que la transformation de $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ à \mathcal{G} est réversible ; \mathcal{G} est une représentation complète de u (u peut être reconstruite depuis \mathcal{G}). De plus, \mathcal{G} est invariant par changement et inversion de contraste marginal de u car $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ le sont.

La seconde partie de la méthode tente d'extraire un arbre depuis \mathcal{G} vérifiant les contraintes données dans la section 3.1. Le problème majeur est d'obtenir un nouvel ensemble de formes depuis \mathcal{G} qui ne se chevauchent pas. Notons d'abord que pour n'importe quel attribut décroissant ρ , on a (\mathcal{S}, \subset) qui est isomorphe à $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ où $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \rho(A) > \rho(B)$ and $A \cap B \neq \emptyset$. En termes plus simples, la relation d'inclusion entre deux formes que nous voulons conserver peut s'exprimer en terme de valeurs d'attributs dans \mathbb{R} . Supposons maintenant que (\mathcal{S}, \subset) est un arbre et considérons l'image $\omega(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(x)$, on a ainsi $\mathbb{C} = \{CC([\omega \geq h]), h \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}$. Dit autrement, le max-tree de l'image ω reconstruite à partir de l'attribut ρ évalué sur un arbre \mathcal{T} donne exactement le même arbre \mathcal{T} (pré-requis R3). Plus généralement, si une forme A ne chevauche aucune autre forme de \mathcal{S} alors elle appartiendra à $CC([\omega \geq h])$ (pré-requis R4). Dans la section qui suit, nous allons maintenant justifier le choix de la profondeur comme attribut pour ρ .

3.3. Le calcul de la carte d'attribut ω

La 4^e étape de la méthode consiste à choisir un attribut à évaluer sur le graphe des formes \mathcal{G} . C'est une étape critique qui décide de quelle forme va être fusionnée ou supprimée. On distingue deux stratégies :

- les stratégies de sélection de formes qui imposent $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. Elles obligent que toute forme de l'arbre final doit exister dans au moins un des arbres marginaux.
- les stratégies de fusion de formes qui autorisent que l'ensemble de formes final \mathcal{S}' soit composé d'unions ou d'intersections de formes de \mathcal{S} .

Dans ce papier, on se concentre uniquement sur la seconde stratégie et nous expliquons maintenant pourquoi nous utilisons la profondeur comme attribut pour fusionner les formes.

Considérons la distance entre deux points (p, p') dans Ω définie par

$$d_{TV}(p, p') = \min_{C(p, p')} \int_0^1 |\nabla u(C(t)) \cdot \dot{C}(t)| dt \quad (2)$$

où $C(t)$ est un chemin dans Ω de p à p' . L'équation (2) est en fait la variation totale (TV) du chemin minimisant la TV parmi tous les chemins de p vers p' . Cette mesure a par exemple été utilisée par [DHK14] à des fins de segmentation où l'arbre des formes est utilisé comme support pour le calcul efficace de la distance. Soit $\omega_{TV}(x) = d_{TV}(\partial\Omega, x)$, la carte de distance de variation totale depuis la bordure de l'image. Celle-ci peut être calculée par simple calcul d'attribut sur l'arbre : il suffit de sommer les variations absolues le long du chemin de la racine vers un nœud. Ainsi, au lieu de considérer l'arbre \mathcal{T} des lignes de niveaux de u , on peut considérer à la place le max-tree \mathcal{T}_ω des lignes équi-distantes de TV. Les deux arbres sont équivalents en niveaux de gris. Le problème avec la variation totale est qu'elle n'est pas invariante au changement de contraste de u . Une distance invariante par changement de contraste de u serait simplement de compter le nombre de variation, i.e., le nombre minimum de ligne de niveaux à traverser pour atteindre p :

$$d_{CV}(p, p') = \min_{C(p, p')} \int_0^1 \mathbb{1}\{\nabla u(C(t)) \cdot \dot{C}(t)\} dt \quad (3)$$

Algorithmiquement parlant, construire ω_{CV} consiste à calculer l'attribut de profondeur $\rho_{CV}(A) = |\{X \in \mathcal{S} \mid A \subset X\}|$ et reconstruire $\omega_{CV}(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho_{CV}(X)$ (voir la figure 6).

Basé sur l'équivalence entre les lignes de niveaux et les lignes "d'équidistances" en niveaux de gris, on peut étendre cette idée en couleur. Comme dans l'équation (3), on souhaite compter le nombre minimum de lignes de niveaux marginales à traverser. Plus formellement :

$$\rho(A) = \max_{\phi \in [\Omega \rightsquigarrow A]} |\phi| \text{ and } \omega_{CV}(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(X)$$

où $[\Omega \rightsquigarrow A]$ désigne l'ensemble de tous les chemins de la racine vers A dans \mathcal{G} . On compte ainsi le nombre

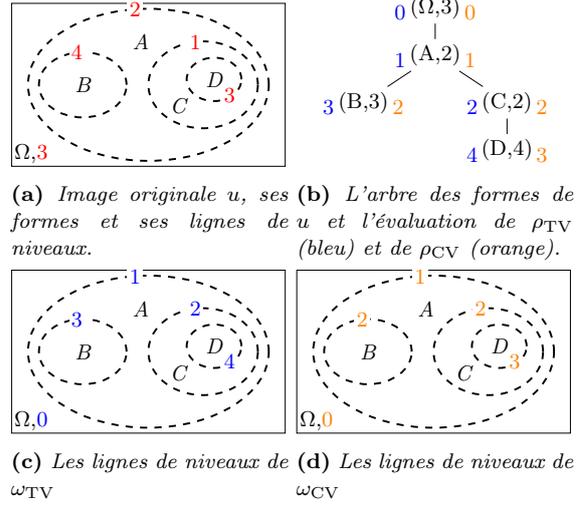


Figure 6: Équivalence entre les lignes de niveaux de l'image en niveaux de gris u et des lignes de niveaux des cartes de distances ω_{TV} et ω_{CV} .

de formes qui s'incluent à traverser pour atteindre la forme la plus profonde contenant x . ρ peut être calculé efficacement depuis \mathcal{G} en utilisant un algorithme classique de plus court chemin.

4. Applications

4.1. Simplification d'images

Pour illustrer la capacité de l'arbre des formes couleur à représenter les structures principales de l'image, nous l'avons confronté à la simplification d'images. Cette évaluation utilise la méthode proposée dans [XGN13a] qui tente de minimiser l'énergie du modèle cartoon de Mumford-Shah contrainte à la topologie de l'arbre. Plus formellement, la méthode sélectionne un sous-ensemble de formes $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ qui minimise :

$$E(\mathcal{S}') = \sum_{S \in \mathcal{S}'} \sum_{x \in S} \|f(x) - \bar{f}(S)\|_2^2 + \lambda |\partial S| \quad (4)$$

où S_x dénote la plus petite forme contenant x , $\bar{f}(S)$ est la couleur moyenne de la région et $|\partial S|$ est la longueur du contour de la forme. Dans [XGN13a], un algorithme glouton est utilisé pour supprimer les lignes de niveaux triées par importance jusqu'à ce que l'énergie cesse de décroître.

La figure 7 montre la simplification sur des images naturelles. Même si nous concevons que la luminance peut-être suffisante pour récupérer l'information géométrique de certaines images, il subsiste des cas où la chrominance joue un rôle important pour distinguer des régions de même luminance. Sur ces images, le faible contraste des contours entre les régions de luminances proches crée un effet de "fuite" et fusionne des formes plutôt sans rapport. La figure 8 illustre le besoin d'une représentation invariante par



Figure 7: Simplification d'images naturelles avec l'arbre des formes couleur. Le 1^{re} ligne contient les images d'origine, la 2^e contient les images simplifiées en utilisant l'arbre des formes calculé sur la luminance uniquement et la dernière ligne montre les résultats à partir de l'arbre des formes couleur. Le même paramètre λ est utilisé pour toutes les images. Travailler avec la luminance seule n'est pas suffisant et crée des fusions de lignes de niveau sans liaisons apparentes alors qu'elles sont bien disjointes dans l'arbre des formes couleur.

changement de contraste dans le cadre de la restauration de documents. Ici, le point important est que l'arbre des formes couleur est capable de récupérer des lettres peu contrastées même en présence d'un "show-thru". Puisque nous utilisons une énergie de segmentation, nous ne prétendons pas que c'est la méthode ultime pour la binarisation de document mais, puisque les documents sont grandement simplifiés tout en préservant les objets d'intérêt, elle peut servir de pré-traitement à une méthode de binarisation dédiée.

4.2. Segmentation d'objets interactive

Dans [DHK14], les auteurs introduisent une méthode pour la segmentation interactive des images en utilisant leur représentation sous forme d'ensembles de niveaux. Nous étendons trivialement cette même idée à l'arbre des formes couleur. Étant donné deux ensembles de marqueurs B et F (tout deux dans $\mathcal{P}(E)$) où B est celui de la classe "fond" et F celui de la classe "objet", on cherche à classifier les autres pixels dans l'une de ces classes. [DHK14] utilise le classifieur du plus proche voisin où la distance entre deux points p et p' est la variation totale du chemin minimiseur de la TV parmi tous les chemins de p vers p' (voir l'équation (2)). L'arbre des formes permet un calcul rapide

de cette distance en sommant les variations le long des chemins de S_p et $S_{p'}$ jusqu'à leur ancêtre commun. Par conséquent, au lieu de travailler au niveau du pixel, la classification peut-être faite de façon équivalente sur l'arbre des formes en calculant les zones d'influence des formes marquées. Avec l'arbre des formes couleur, un nœud peut contenir des pixels de différentes couleurs, par conséquent on considère que la distance entre une forme et son parent est simplement la distance l_2 entre les couleurs moyennes des nœuds.

La méthode est illustrée sur la figure 9. Un avantage de celle-ci réside dans son aptitude à segmenter de larges régions d'intérêt avec peu de marqueurs là où les méthodes statistiques nécessitent de plus larges marqueurs pour un meilleur apprentissage. Nous n'avons pas montré les résultats de l'arbre des formes calculé sur la luminance seule mais on observe les mêmes problèmes (et donc les mêmes remarques) que lors de la simplification.

5. Conclusion

Nous avons présenté une méthode qui étend l'arbre des formes sur les images multivariées. Contrairement aux approches standard, notre arbre des formes



Figure 8: Simplification sur des images de document.

couleur s'affranchit du choix d'un ordre total sur ces données et repose uniquement sur la relation d'inclusion entre les formes. Elle produit ainsi un arbre qui est invariant par changement et inversion de contraste marginal de l'image. Au long de ce papier, nous avons tenté de mettre en évidence en quoi ces propriétés sont fondamentales en traitement d'images et en vision par ordinateur. Nous l'avons illustré à travers des applications de simplification et de segmentation montrant des résultats déjà prometteurs et mettant ainsi en avant la versatilité et le potentiel de notre arbre des formes couleur.

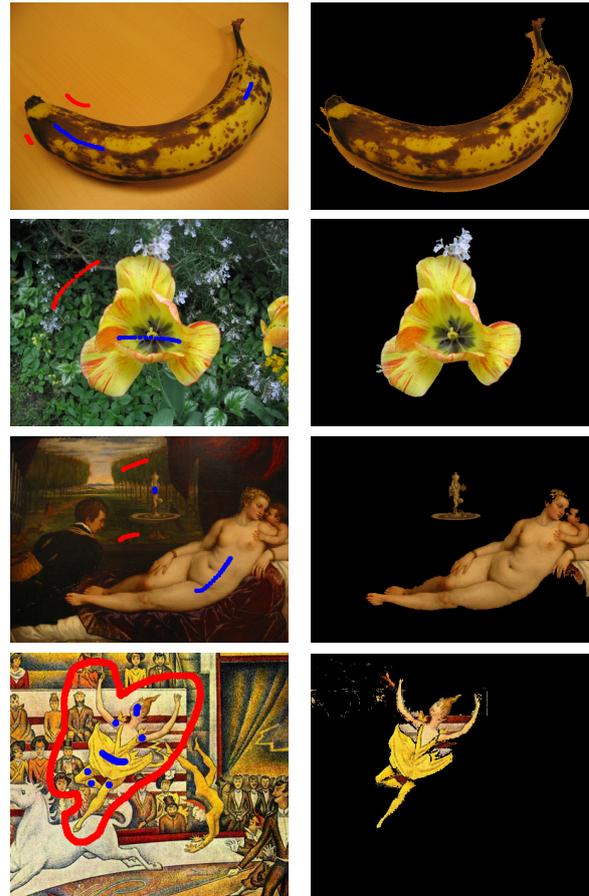


Figure 9: Segmentation interactive avec l'arbre des formes couleur. La colonne de gauche montre les images d'origine et les marqueurs. La colonne de droite montre la segmentation.

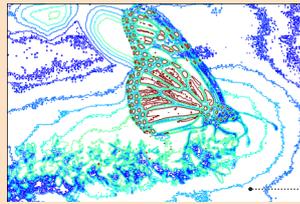
Références

- [AL07] APTOULA E., LEFÈVRE S. : A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition*. Vol. 40, Num. 11 (2007), 2914–2929.
- [Bar76] BARNETT V. : The ordering of multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. Vol. 139, Num. 3 (1976), 318–355.
- [BCIG07] BALLESTER C., CASELLES V., IGUAL L., GARRIDO L. : Level lines selection with variational models for segmentation and encoding. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 27 (2007), 5–27.
- [CCM99] CASELLES V., COLL B., MOREL J.-M. : Topographic maps and local contrast changes in natural images. *International Journal of Computer Vision*. Vol. 33, Num. 1 (1999), 5–27.
- [CCM02] CASELLES V., COLL B., MOREL J.-M. : Geometry and color in natural images. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 16, Num. 2 (2002), 89–105.

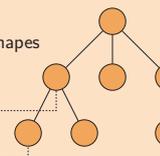
- [CF00] COLL B., FROMENT J. : Topographic maps of color images. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (2000), vol. 3, pp. 609–612.
- [CG14a] CARLINET E., GÉRAUD T. : Getting a morphological tree of shapes for multivariate images : Paths, traps and pitfalls. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (Paris, France, 2014), pp. 615–619.
- [CG14b] CARLINET E., GÉRAUD T. : A morphological tree of shapes for color images. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (Stockholm, Sweden, août 2014), pp. 1132–1137.
- [CM09] CASELLES V., MONASSE P. : *Geometric Description of Images as Topographic Maps*, vol. 1984 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2009.
- [CMS05] CAO F., MUSÉ P., SUR F. : Extracting meaningful curves from images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 22, Num. 2-3 (2005), 159–181.
- [DHK14] DUBROVINA A., HERSHKOVITZ R., KIMMEL R. : Image editing using level set trees. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2014). to appear.
- [DK01] DIBOS F., KOEPLER G. : Total variation minimization by the Fast Level Sets Transform. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision* (2001), IEEE Computer Society, pp. 179–185.
- [GCCN13] GÉRAUD T., CARLINET E., CROZET S., NAJMAN L. : A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of n -D images. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 98–110.
- [Hei96] HEIJMANS H. J. A. M. : Self-dual morphological operators and filters. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 6, Num. 1 (1996), 15–36.
- [LCE*09] LEZORAY O., CHARRIER C., ELMOATAZ A., ET AL. : Rank transformation and manifold learning for multivariate mathematical morphology. In *Proc. of European Signal Processing Conference* (2009), vol. 1, pp. 35–39.
- [LME05] LEZORAY O., MEURIE C., ELMOATAZ A. : A graph approach to color mathematical morphology. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology* (2005), IEEE, pp. 856–861.
- [NP09] NAEGEL B., PASSAT N. : Component-trees and multi-value images : A comparative study. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2009), vol. 5720 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 261–271.
- [NP13] NAEGEL B., PASSAT N. : Towards connected filtering based on component-graphs. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 353–364.
- [PLCS10] PERRET B., LEFÈVRE S., COLLET C., SLEZAK E. : Connected component trees for multivariate image processing and applications in astronomy. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (août 2010), pp. 4089–4092.
- [PN09] PASSAT N., NAEGEL B. : An extension of component-trees to partial orders. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2009), IEEE Press, pp. 3933–3936.
- [Soi05] SOILLE P. : Beyond self-duality in morphological image analysis. *Image and Vision Computing*. Vol. 23, Num. 2 (2005), 249–257.
- [SS95] SALEMBIER P., SERRA J. : Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 4, Num. 8 (1995), 1153–1160.
- [TW12] TUSHABE F., WILKINSON M. H. F. : Color processing using max-trees : A comparison on image compression. In *Proc. of International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)* (2012), IEEE, pp. 1374–1380.
- [VFA11] VELASCO-FORERO S., ANGULO J. : Supervised ordering in \mathcal{R}_p : Application to morphological processing of hyperspectral images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 20, Num. 11 (2011), 3301.
- [VFA12] VELASCO-FORERO S., ANGULO J. : Random projection depth for multivariate mathematical morphology. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. Vol. 6, Num. 7 (2012), 753–763.
- [XGMN14] XU Y., GÉRAUD T., MONASSE P., NAJMAN L. : Tree-based morse regions : A topological approach to local feature detection. *IEEE Transactions on Image Processing* (2014). to appear.
- [XGN12] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Context-based energy estimator : Application to object segmentation on the tree of shapes. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2012), pp. 1577–1580.
- [XGN13a] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Salient level lines selection using the Mumford-Shah functional. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2013), pp. 1227–1231.
- [XGN13b] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Two applications of shape-based morphology : Blood vessels segmentation and a generalization of constrained connectivity. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 390–401.



Level lines representation



Tree of Shapes



Featuring

- Connected components without holes
- Self duality
- Many morphological invariances

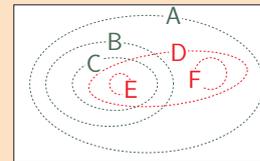
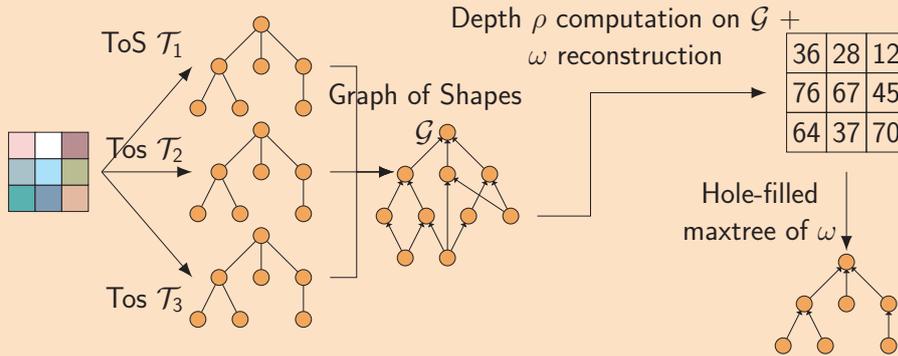
At a Glance

- **Motivation.** The Tree of Shapes (ToS) provides a *high-level representation of the image structure* and has *many applications*.
- **Objective.** Extend the ToS computation on color images.
- **Problem.** A natural tree **does not** exist for color images, “standard” approaches are not satisfactory.
- **Contribution.** A method that:
 - does **not** rely on any total ordering of colors,
 - is invariant by any marginal change of contrast,
 - is invariant by any marginal inversion of contrast,
 - is equivalent to the “normal” ToS in the gray level case.

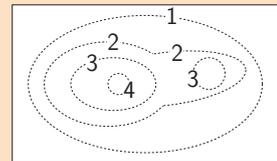


The ToS is invariant by contrast and inversion change of contrast → these images have the same tree

Method Description

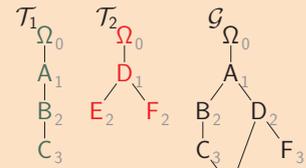


(a) A 2-channel image and its shapes.

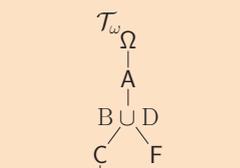


(c) ω image built from \mathcal{G}

1. Compute the marginal ToS \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 and \mathcal{T}_3 .
2. Merge them into a single graph structure \mathcal{G} (the Graph of Shapes (GoS)).
3. Compute the depth ρ of each shape S in \mathcal{G} . The depth is the longest path from the root to that shape.
4. Reconstruct $\omega(x) = \max_{S|x \in S} \rho(S)$
5. Compute the hole-filled maxtree of ω to get the final tree \mathcal{T}_ω .

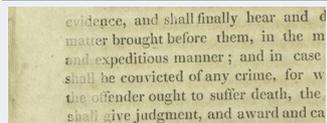


(b) The marginal ToS \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 and the GoS (the depth in light gray)

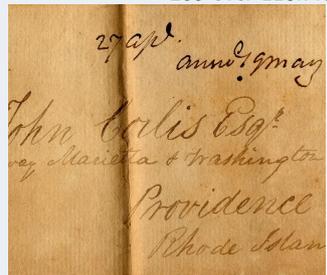
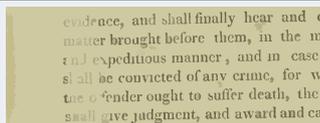


(d) The hole-filled max-tree \mathcal{T}_ω of ω

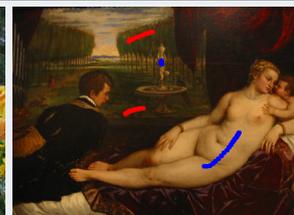
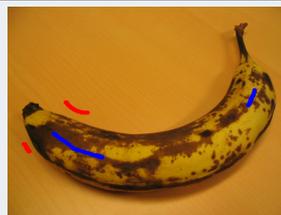
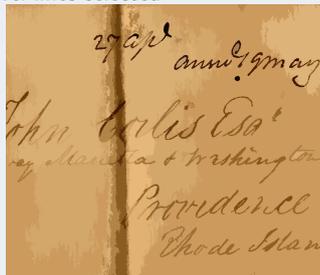
Applications: Image Simplification (left) and Interactive Segmentation (right)



285 over 113k level lines selected



112 over 288k level lines selected



Markers (top row) and segmented images (bottom row)

[1] J. Angulo and J. Chanussot. **Color and multivariate images**. In L. Najman and H. Talbot, Eds, *Mathematical Morphology*, chap. 11, pp. 291–321. ISTE & Wiley, 2010.
 [2] E. Aptoula and S. Lefèvre. **A comparative study on multivariate mathematical morphology**. *Pattern Recognition*, 40(11):2914–2929, 2007.
 [3] B. Naegel and N. Passat. **Towards connected filtering based on component-graphs**. In *Proc. of ISMM*, volume 7883 of *LNCS*, pages 353–364. Springer, 2013.
 [4] E. Carlinet and T. Géraud. **Getting a morphological tree of shapes for multivariate images: Paths, traps and pitfalls**. In *Proc. of IEEE ICIP*, Paris, France, 2014, pp. 615–619.