



**HAL**  
open science

## Transformations rigides pour les objets discrets non-convexes en 2D

Thuy Hong Dao, Phuc Ngo, Isabelle Debled-Rennesson, Yukiko Kenmochi,  
Nicolas Passat

► **To cite this version:**

Thuy Hong Dao, Phuc Ngo, Isabelle Debled-Rennesson, Yukiko Kenmochi, Nicolas Passat. Transformations rigides pour les objets discrets non-convexes en 2D. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique (GTMG), 2018, Aix-en-Provence, France. hal-01740074

**HAL Id: hal-01740074**

**<https://hal.univ-reims.fr/hal-01740074>**

Submitted on 21 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transformations rigides pour les objets discrets non-convexes en 2D

Thuy Hong Dao<sup>1</sup>, Phuc Ngo<sup>1</sup>, Isabelle Debled-Rennesson<sup>1</sup>, Yukiko Kenmochi<sup>2</sup>, Nicolas Passat<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université de Lorraine, LORIA, UMR 7503, France

<sup>2</sup> Université Paris-Est, LIGM, CNRS, France

<sup>3</sup> Université de Reims Champagne-Ardenne, CReSTIC, France

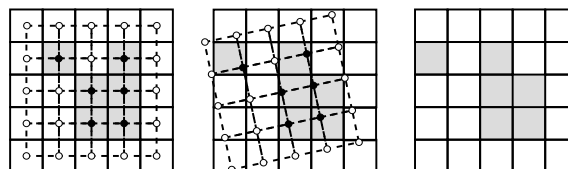
## Résumé

Les transformations rigides sont impliquées dans de nombreuses applications de traitement et d'analyse d'images numériques. Il est connu que les transformations rigides sur  $\mathbb{R}^2$  conservent les propriétés géométriques et topologiques des objets. Cependant, lorsqu'elles sont considérées dans l'espace des images numériques, ces propriétés sont généralement perdues en raison du processus de discrétisation requis afin d'obtenir un résultat dans  $\mathbb{Z}^2$ . Dans ce contexte, une caractérisation des images numériques garantissant la préservation des propriétés topologiques et géométriques —en particulier, la convexité— après des transformations rigides arbitraires de  $\mathbb{Z}^2$  a été proposée récemment. Dans le même cadre, une méthode a été présentée pour appliquer des transformations rigides sur des objets discrets convexes en 2D. Cette méthode a été initialement étendue pour des objets non-convexes, par l'utilisation d'une structure d'arbre de concavités. Cependant, la structure utilisée induit des décalages entre certaines régions convexes, ce qui conduit à des résultats imprévus dans l'image transformée. Dans ce travail, nous proposons une modification de cette méthode afin d'éviter les défauts initialement induits. Notre approche repose notamment sur une décomposition polygonale spécifique des objets discrets présents dans la forme à transformer.

**Mots-clés :** transformations géométriques, arbre de concavités, polygonalisation, topologie, convexité discrète

## 1. Introduction

Une transformation rigide, composée d'une translation et d'une rotation, est définie comme une fonction bijective de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il est bien connu que ces transformations préservent les propriétés géométriques et topologiques des objets. Elles sont fréquemment utilisées dans les applications de traitement et d'analyse d'images (par exemple, en recalage d'images [ZF03], en suivi de mouvement [YJS06]). Dans la plupart de ces applications sur les images numériques, les transformations rigides utilisées s'appuient sur une phase de traitement continu, suivie d'un processus de discrétisation afin d'obtenir un résultat dans  $\mathbb{Z}^n$ ; de telles transformations sont alors nommées *transformations rigides digitales*. En raison de la phase de discrétisation, les transformations rigides digitales perdent généralement d'importantes propriétés par rapport à leurs homologues continus. Plus précisément, cette discrétisation conduit à des altérations géométriques et topologiques dans l'espace trans-



**Figure 1:** Exemples d'altérations géométriques et topologiques par les transformations rigides digitales en raison de la discrétisation. À gauche : image numérique et grille modélisant sa structure discrète. Au centre : transformation appliquée sur la grille et suivie par la discrétisation. À droite : image résultat dont les propriétés topologiques et géométriques ont changé ; l'objet discret est divisé en deux.

formé, comme illustré dans la figure 1. Dans ce contexte, nous nous intéressons aux transformations rigides dans l'espace discret  $\mathbb{Z}^2$  ainsi qu'à la préservation topologique et géométrique —en particulier, la préservation des parties convexes et concaves— par ces transformations.

Ce problème de préservation topologique par transformations rigides digitales a été étudié dans [NPKT14]. Une étude similaire pour les objets discrets convexes en 2D a été proposée dans [NKDRP17]. En particulier, des caractérisations d’images numériques ainsi que des schémas algorithmiques de transformations rigides ont été proposés dans ces articles, afin de garantir la préservation des propriétés topologiques et la convexité des objets après des transformations rigides arbitraires de  $\mathbb{Z}^2$ . Par ailleurs, la méthode proposée dans [NKDRP17] —initialement sur des objets discrets convexes— a été étendue pour des objets non-convexes, par l’utilisation de la représentation d’un objet discret par des demi-plans et de la structure de l’arbre de concavités [Skl72]. Cependant, la structure arborescente utilisée induit des décalages entre certaines régions convexes, ce qui conduit à des résultats inattendus dans l’image transformée. Dans ce travail, nous proposons une modification de la méthode proposée dans [NKDRP17] afin d’éviter les défauts induits. Notre approche repose sur une décomposition polygonale spécifique des objets discrets présents dans la forme à transformer.

Le reste du papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons la notion de transformation rigide digitale et les modifications de topologie et de géométrie dans l’espace transformé. La section 3 résume la méthode proposée dans [NKDRP17] pour les transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$ , permettant de préserver la topologie et la convexité des objets discrets. La méthode est étendue aux objets non-convexes avec l’utilisation de l’arbre de concavités, en section 4. Cependant, elle conduit à des défauts dans l’espace transformé. Nous proposons une modification de cet arbre de concavités dans la section 5 et présentons des résultats expérimentaux associés dans la section 6.

## 2. Transformations rigides sur $\mathbb{Z}^2$ et problématiques

### 2.1. Transformations rigides digitales

Nous considérons un objet  $X$  dans l’espace euclidien de  $\mathbb{R}^2$  comme un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ . Les transformations rigides dans  $\mathbb{R}^2$  sont définies par une fonction  $\mathfrak{T}$  :

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto Rx + t \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $R$  est une matrice de rotation et  $t \in \mathbb{R}^2$  est un vecteur de translation. La transformation rigide  $\mathfrak{T}$  est une fonction bijective et isométrique. Une telle transformation préserve la forme de l’objet ; par conséquent,  $\mathfrak{T}(X)$  a les mêmes topologie et géométrie que  $X$ .

Cependant, il n’est pas possible d’appliquer directement une transformation rigide  $\mathfrak{T}$  aux images numériques définies sur  $\mathbb{Z}^2$  car, en général,  $\mathfrak{T}(p) \notin \mathbb{Z}^2$  pour  $p \in \mathbb{Z}^2$ . Pour manipuler les transformations sur  $\mathbb{Z}^2$ , ces dernières sont alors généralement considérées dans l’espace continu associé de  $\mathbb{R}^2$  et requièrent ensuite un processus de discrétisation  $\mathfrak{D} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  afin d’obtenir un résultat sur  $\mathbb{Z}^2$ .

Formellement, une telle transformation point-par-point, appelée *transformation rigide digitale*, est définie comme :  $\mathcal{T}_{point} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{T}|_{\mathbb{Z}^2}$ . La transformation rigide digitale sur un sous-ensemble fini  $X \subset \mathbb{Z}^2$ , appelé un objet discret, est notée par  $\mathcal{T}_{point}(X)$ .

### 2.2. Altérations topologiques et géométriques des transformations rigides digitales

Du fait de la discrétisation de  $\mathfrak{D}$  dans  $\mathcal{T}_{point}$ , les transformations digitales perdent, dans la plupart des cas, leurs propriétés par rapport à leurs homologues continus. Cela conduit à des altérations de géométrie et topologie dans l’espace transformé de  $\mathbb{Z}^2$  †.

La figure 2 illustre quelques exemples de transformations rigides digitales  $\mathcal{T}_{point}$  sur des droites discrètes de différentes épaisseurs. Nous pouvons y observer que la topologie et la géométrie des objets discrets ne sont pas toujours conservées, même lorsque les formes initiales sont très simples. Si une droite discrète est suffisamment épaisse, elle préserve sa topologie, mais pas toujours sa géométrie.

Dans [NPKT14], une condition, nommée *régularité digitale*, sur les images numériques est proposée afin de garantir la préservation topologique par les transformations rigides digitales  $\mathcal{T}_{point}$ . Cependant, une application directe de  $\mathcal{T}_{point}$  à chaque point  $x \in X$  est une approche inadéquate pour la préservation de la géométrie de l’objet. Dans ce contexte, une caractérisation des images numériques, nommée *quasi-r-régularité*, est proposée dans [NKDRP17]. Elle permet de préserver non seulement la 4-connexité, mais aussi la convexité, par les transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$ . De plus, un nouveau schéma algorithmique a également été présenté pour la modélisation et la manipulation des transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$ , assurant la préservation de ces propriétés pour des objets discrets convexes.

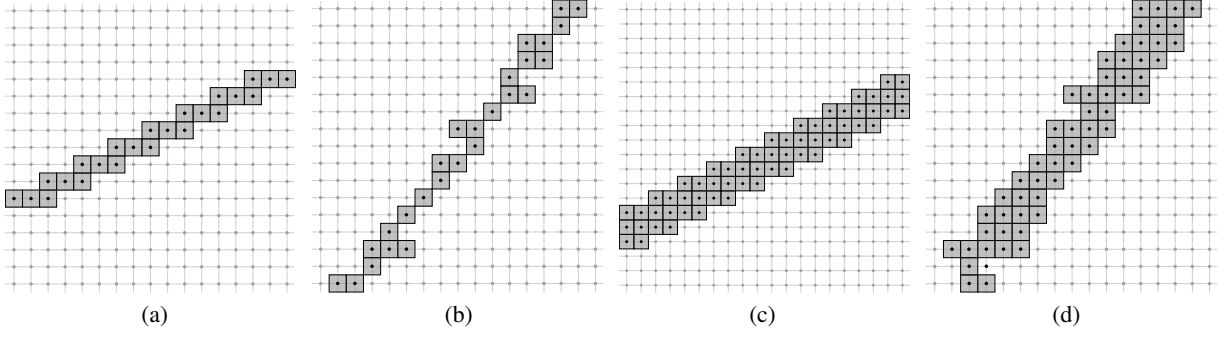
### 3. Transformations rigides pour les objets discrets convexes

Dans cette section, nous rappelons brièvement quelques définitions de base et le schéma algorithmique, ainsi que les résultats présentés dans [NKDRP17] pour les transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$  permettant de préserver la convexité. Dans ce papier, nous considérons seulement les objets discrets 4-connexes.

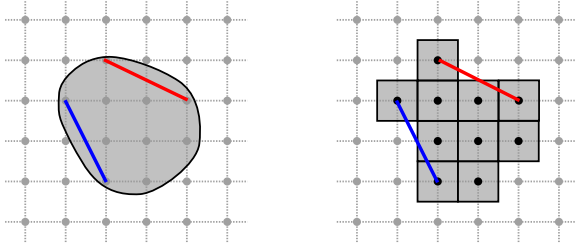
†. Dans cet article, nous considérons les notions classiques de la topologie discrète (cf. [KR04] par exemple). Plus précisément, pour un point  $p \in \mathbb{Z}^2$ , le  $k$ -voisinage de  $p$  est défini par :

$$\mathcal{N}_k(p) = \{q \in \mathbb{Z}^2 : \|p - q\|_\ell \leq 1\}$$

pour  $k = 4$  (resp. 8) où  $\ell = 1$  (resp.  $\infty$ ). Un point  $q$  est  $k$ -adjacent à  $p$  si  $q \in \mathcal{N}_k(p) \setminus \{p\}$ . À partir de la relation de  $k$ -adjacence, nous définissons la  $k$ -connexité dans un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{Z}^2$  comme la relation d’équivalence obtenue par fermeture réflexive-transitive.



**Figure 2:** Des droites discrètes de différentes épaisseurs (a,c) et les images transformées associées (b,d). Après la transformation rigide  $\mathcal{T}_{point}$ , l'image résultante (b) de (a) n'est plus topologiquement équivalente à l'image initiale (a) (la 4-connexité devient une 8-connexité). Contrairement au premier cas, lorsque la droite est plus épaisse, l'image résultante (d) issue de (c) est topologiquement équivalente à l'image initiale (c). Dans les deux cas, la convexité est perdue par  $\mathcal{T}_{point}$ .



**Figure 3:** La caractérisation de la notion de convexité définie sur  $\mathbb{R}^2$  (à gauche) n'est pas utilisable sur  $\mathbb{Z}^2$  (à droite) du fait de la discrétisation.

### 3.1. Convexité discrète

Dans  $\mathbb{R}^2$ , un objet  $X$  est dit *convexe* si et seulement si pour tout couple de points  $X$ , le segment borné par ces deux points est entièrement contenu dans  $X$ . Cependant, cette définition ne peut pas être appliquée directement sur des objets discrets  $X \subset \mathbb{Z}^2$ . En effet, le segment qui joint deux points dans  $X$  n'est généralement pas inclus dans  $X$ , comme illustré dans la figure 3.

Dans ce contexte, plusieurs extensions de la notion de convexité dans les espaces discrets ont été proposées, telles que la MP-convexité [MP69], la S-convexité [Sk170], la D-convexité [Kim81], la H-convexité [Kim81]. Dans [NKDRP17], cette dernière extension a été utilisée en raison, d'une part, de sa compatibilité avec les autres types de convexité dans le cas des objets 4-connexes et, d'autre part, de sa définition basée sur l'enveloppe convexe de l'objet, permettant d'appliquer des transformations rigides sur des objets discrets convexes tout en préservant les propriétés de connexité et de convexité. Nous rappelons ci-après la définition de l'enveloppe convexe d'un objet discret, puis donnons

la définition formelle de la H-convexité :

$$\mathcal{Conv}(X) = \quad (2)$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i p_i \wedge \sum_{i=1}^{|X|} \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i \geq 0 \wedge p_i \in X \right\}$$

**Définition 1** Un objet discret (connexe)  $X$  est *H-convexe* si  $X = \mathcal{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$ .

Plus explicitement, un objet discret  $X$  est H-convexe si son enveloppe convexe contient exactement les points de  $X$ . Dans les prochaines sections, le terme de convexité désignera la H-convexité.

Il est important de mentionner que la H-convexité reste préservée par intersection, sous la condition de connexité, comme prouvé dans le corollaire 3.5.1 de [CL02].

**Propriété 1** Soit  $X$  et  $Y$  deux objets discrets. Si  $X$  et  $Y$  sont H-convexes et  $X \cap Y$  est connexe, alors  $X \cap Y$  est H-convexe.

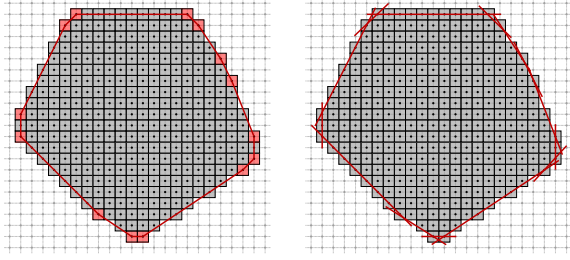
### 3.2. Représentation par demi-plans des objets convexes

Lorsque  $X \subset \mathbb{Z}^2$  contient au moins 3 points non-collinéaires,  $\mathcal{Conv}(X)$  est un polygone convexe dont les sommets sont des points de  $X$ . Alors,  $\mathcal{Conv}(X)$  peut être représenté par une union de demi-plans fermés comme suit :

$$\mathcal{Conv}(X) = \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\mathcal{Conv}(X))} H \quad (3)$$

où  $\mathcal{R}(P)$  est l'ensemble minimal des demi-plans constituant un polygone convexe  $P$ , et  $H$  est un demi-plan de  $P$  déterminé par les paires des sommets consécutifs de  $\mathcal{Conv}(X)$ , comme illustré dans la figure 4. Puisque les coordonnées de ces sommets sont des entiers,  $H$  peut avoir donc aussi des coefficients entiers, tel que

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c \leq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}, \gcd(a, b) = 1\} \quad (4)$$



**Figure 4:** Exemple de représentation par des demi-plans d'objets discrets convexes. À gauche : objet discret avec son enveloppe convexe (en rouge). À droite : représentation par des demi-plans extraits à partir de cette enveloppe convexe.

À partir de la définition 1 et de la propriété 1,  $X \subset \mathbb{Z}^2$  peut être déterminé par :

$$X = \left( \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(X))} H \right) \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(X))} (H \cap \mathbb{Z}^2). \quad (5)$$

### 3.3. Transformations rigides des objets discrets convexes

En utilisant la représentation d'un objet convexe par des demi-plans, un schéma algorithmique de transformation rigide sur  $\mathbb{Z}^2$  a été proposé dans [NKDRP17] permettant de préserver la convexité des objets convexes. L'idée de cette méthode est que, au lieu d'appliquer  $\mathcal{T}_{point}$  sur chaque point de  $X$ , la transformation rigide  $\mathcal{T}$  est appliquée sur chaque demi-plan formant l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(X)$  de  $X$  et est suivie par une discrétisation sur l'intersection des demi-plans transformés afin de retrouver l'objet discret transformé final :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\text{Conv}(X)} &= \mathfrak{T} \left( \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(X))} (H \cap \mathbb{Z}^2) \right) \\ &= \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(X))} \mathfrak{T}(H) \cap \mathbb{Z}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Par construction,  $\mathcal{T}_{\text{Conv}(X)}$  permet de préserver la H-convexité de l'objet discret H-convexe  $X$ .

Dans [NKDRP17], il est montré qu'un objet convexe préserve également sa 4-connexité par  $\mathcal{T}_{\text{Conv}}$  s'il satisfait la condition de la *quasi- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -régularité* (voir [NKDRP17] pour plus de détails).

### 4. Extension aux objets non-convexes [NKDRP17]

L'approche proposée par [NKDRP17] pour les objets discrets convexes est étendue au cas des transformations rigides sur des objets non-convexes en utilisant une structure hiérarchique, initialement introduite dans [Sk172], nommée *arbre de concavités*.

### 4.1. Arbre de concavités

L'arbre de concavités d'un objet discret est une représentation hiérarchique des parties convexes et concaves de cet objet, avec différents niveaux de détail. Cette structure arborescente a été utilisée dans le cadre d'applications telles que le calcul de polygones à périmètre minimum [Kle13, Sk172], l'analyse de forme hiérarchique [BdB96], ou encore l'approximation polygonale [AACPMCMC14].

Soit un objet discret  $X$ . Un arbre de concavités associé à  $X$  est tel que sa racine correspond aux points dans l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$ ; les nœuds successifs modélisent chacun de manière de plus en plus fine la géométrie des concavités de  $X$  par rapport à  $\text{Conv}(X)$ , par suppressions et ajouts successifs de parties convexes. En particulier, chaque partie concave  $X'$  de  $X$  est obtenue en tant que composante connexe de la soustraction de  $X$  à l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2$  :

$$X' \in \mathfrak{C}((\text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus X)$$

où  $\mathfrak{C}(S)$  désigne l'ensemble des composantes connexes d'un ensemble fini  $S$ . Nous obtenons alors :

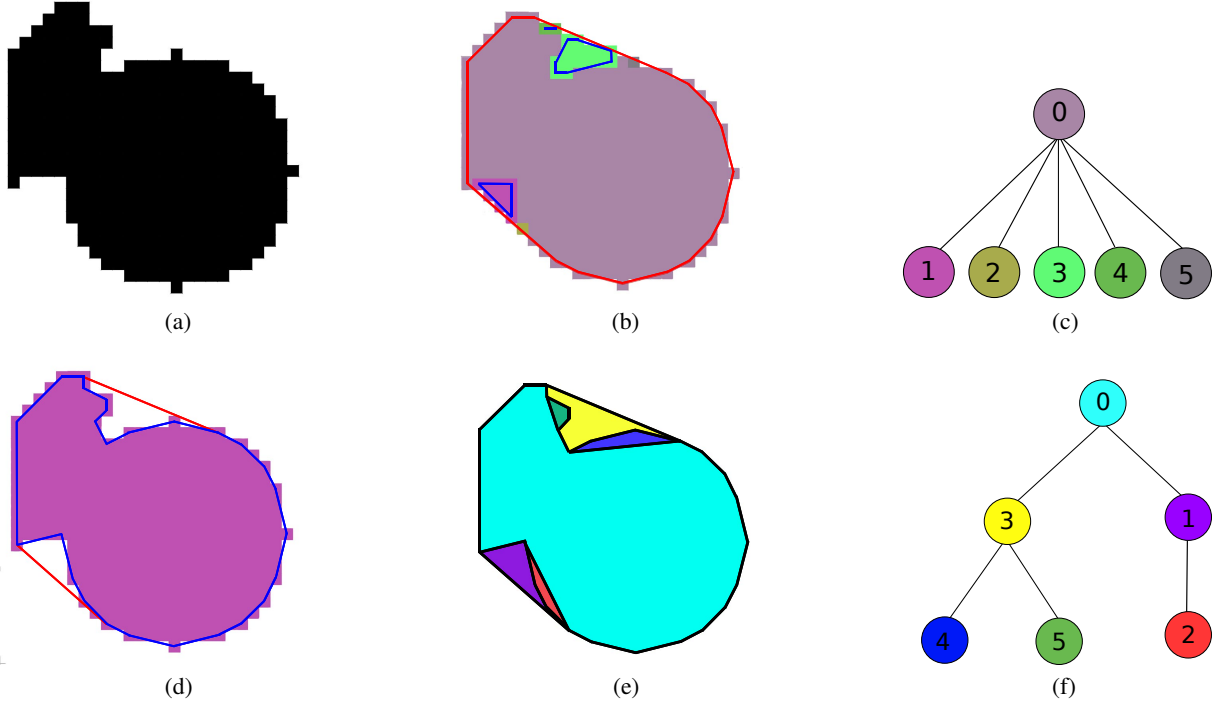
$$X = (\text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \left( \bigcup_{X' \in \mathfrak{C}((\text{Conv}(X) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus X)} X' \right) \quad (7)$$

où chaque partie  $X'$  est ensuite récursivement représentée par la même formule, c'est-à-dire comme un objet convexe auquel on retranche ensuite des zones de concavités elles-mêmes convexes, jusqu'à ce qu'aucune partie concave ne soit plus trouvée. La figure 5(a-c) illustre un exemple d'arbre de concavités.

### 4.2. Transformations rigides d'objets non-convexes utilisant l'arbre de concavités

Nous observons dans l'équation (7) qu'un objet discret  $X$  peut être hiérarchiquement décomposé en l'ensemble des enveloppes convexes des parties concaves via les opérations de soustraction. Une telle décomposition hiérarchique par des enveloppes convexes est pertinente par rapport à l'approche proposée dans la section 3. Plus précisément, on considère un arbre de concavités tel que chaque nœud correspond à la représentation par demi-plans de l'enveloppe convexe d'une partie concave  $Y$ ,  $\text{Conv}(Y) = \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(Y))} H$ , au lieu de  $Y$

lui-même. Une fois la décomposition hiérarchique de l'objet discret obtenue, la transformation  $\mathcal{T}_{\text{Conv}}$  est appliquée à la discrétisation de chaque enveloppe convexe,  $\text{Conv}(Y) \cap \mathbb{Z}^2$ , tel que décrit dans la section 3.3, puis nous effectuons les opérations de soustraction définies par l'arbre de concavités



**Figure 5:** (a) Un objet discret et (b) ses parties concaves. (c) L'arbre de concavités associé à (a) est construit à partir des parties concaves dans (b). (d) Polygone associé à (a), en bleu, et l'enveloppe convexe de (a), en rouge. (e) Les polygones non-convexes de (d). (f) L'arbre de concavités est construit à partir de ces polygones non-convexes dans (e).

associé.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\mathcal{Hull}}(\mathbf{X}) & \quad (8) \\
 &= \mathfrak{T} \left( (\text{Conv}(\mathbf{X}) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \left( \bigcup_{\mathbf{X}' \in \mathfrak{C}((\text{Conv}(\mathbf{X}) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \mathbf{X})} \mathbf{X}' \right) \right) \\
 &= \mathcal{T}_{\text{Conv}}(\mathbf{X}) \setminus \left( \bigcup_{\mathbf{X}' \in \mathfrak{C}((\text{Conv}(\mathbf{X}) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \mathbf{X})} \mathcal{T}_{\mathcal{Hull}}(\mathbf{X}') \right)
 \end{aligned}$$

Cependant, une telle stratégie peut générer des résultats inattendus. Ainsi, dans l'exemple illustré en figure 6, nous pouvons observer que l'objet original (a) est sans trou. Cependant, en appliquant la méthode proposée, de nouveaux points sont générés ; ceci conduit à la création d'un trou dans l'objet transformé (f). Ce résultat est expliqué par le fait que, dans l'arbre de concavités construit, les sommets de l'enveloppe convexe des parties concaves ne se situent pas forcément sur l'enveloppe convexe de leur parent. Cela conduit à des décalages entre des arêtes —donc, demi-plans— des enveloppes convexes des parties concaves et de l'objet parent. L'objet transformé étant reconstruit via des opérations de soustraction (voir section 4.2), ces décalages conduisent à des incohérences topologiques et géométriques.

Afin d'éviter ces décalages, nous proposons une modification de cette méthode. Notre approche est basée sur une

décomposition polygonale spécifique des objets discrets présents dans la forme à transformer.

## 5. Arbre de concavités basé sur une décomposition polygonale

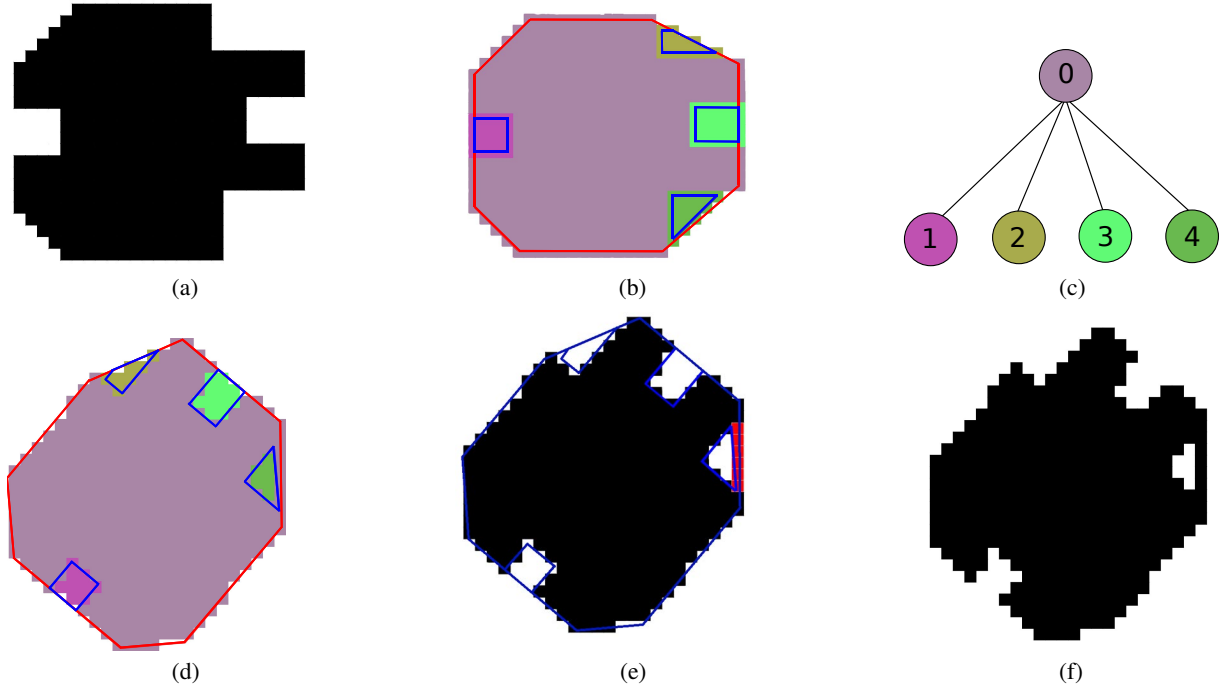
Dans cette section, nous présentons notre approche visant à construire l'arbre de concavités en utilisant des polygones au lieu des enveloppes convexes, afin d'éliminer les décalages entre les régions convexes. Nous considérons seulement des objets discrets 4-connexes sans trou. En effet, les objets contenant des trous peuvent être traités en utilisant la structure d'arbre des composantes connexes [Wis69, Har85] ; chaque composante de cet arbre est ainsi traitée individuellement dans notre méthode.

### 5.1. Polygonalisation d'un objet discret

Soit  $\mathbf{X} \subset \mathbb{Z}^2$  un objet discret, non forcément convexe et sans trou. Nous construisons un polygone  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  de  $\mathbf{X}$  permettant de représenter  $\mathbf{X}$ . Plus précisément, la discrétisation de ce polygone est égale à l'objet initial :

$$\mathbf{X} = \mathcal{P}(\mathbf{X}) \cap \mathbb{Z}^2 \quad (9)$$

De plus, le polygone  $\mathcal{P}(\mathbf{X})$  doit correspondre raisonnablement au contour de l'objet  $\mathbf{X}$ .



**Figure 6:** Exemple de transformation rigide sur un objet discret non-convexe avec l'approche basée sur l'arbre de concavités avec utilisation de l'enveloppe convexe. (a) L'objet discret et (b) sa décomposition en parties concaves avec les enveloppes convexes. (c) L'arbre de concavités de (a). (d) Les enveloppes convexes transformées et (e) la reconstruction de l'objet transformé à partir de l'arbre de concavités (c) et des enveloppes convexes transformées (d). Des points (en rouge) apparaissent en raison de décalage entre des demi-plans. (f) L'objet transformé reconstruit.

Nous proposons, ci-après, une méthode de polygonalisation des objets discrets. Cette méthode utilise les points du contour de l'objet ainsi que son enveloppe convexe de telle sorte que :

$$\begin{cases} \text{Conv}(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X) \text{ si } \mathcal{P}(X) \text{ est convexe} \\ \text{Conv}(\mathcal{P}(X)) \neq \mathcal{P}(X) \text{ sinon} \end{cases}$$

En conséquence, nous avons :

$$\begin{cases} X = \mathcal{P}(X) \cap \mathbb{Z}^2 = \text{Conv}(\mathcal{P}(X)) \cap \mathbb{Z}^2 \text{ si } X \text{ est H-convexe} \\ X = \mathcal{P}(X) \cap \mathbb{Z}^2 \neq \text{Conv}(\mathcal{P}(X)) \cap \mathbb{Z}^2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Plus précisément, lorsque l'objet discret  $X$  est H-convexe, son enveloppe convexe est aussi son polygone. Dans le cas où  $X$  n'est pas convexe, son enveloppe convexe englobe le polygone de  $X$ ; en particulier, dans les parties convexes de  $X$ , les sommets de  $\text{Conv}(X)$  sont aussi ceux du  $\mathcal{P}(X)$ . Dans des parties concaves de  $X$ , les sommets du polygone sont choisis tels que la distance entre deux sommets consécutifs soit la plus élevée possible et qu'il ne contienne aucun point  $p \notin X$ . Plus précisément, le processus de polygonalisation de  $X$  est comme suit, avec  $V_{\mathcal{P}(X)}$  la séquence des sommets de  $\mathcal{P}(X)$ .

Étape 1 – Calculer l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(X)$ . Nous notons  $\bar{V}_{\text{Conv}(X)}$  la séquence (en sens anti-horaire) des som-

ets de  $\text{Conv}(X)$ .

Étape 2 – Déterminer le contour 4-connexe  $\mathcal{B}(X)$  de  $X$ . Nous notons  $V_{\mathcal{B}(X)}$  la séquence (en sens anti-horaire) des points de  $\mathcal{B}(X)$ .

Étape 3 – Pour chaque paire de points consécutifs  $p_i, p_{i+1} \in \bar{V}_{\text{Conv}(X)}$ , vérifier s'il existe un point  $q \notin X$  qui se situe à gauche du segment droit formé par  $p_i$  et  $p_{i+1}$ .

– Si non (on est alors dans la partie convexe de  $X$ ), ajouter  $p_i, p_{i+1}$  dans  $V_{\mathcal{P}(X)}$ .

– Si oui (on est alors dans la partie concave de  $X$ ), chercher des sommets de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $V_{\mathcal{B}(X)}$  entre  $p_i$  et  $p_{i+1}$ ; noter  $V_{\mathcal{B}(p_i, p_{i+1})}$  cette séquence; initialiser  $q = p_i$ ; parcourir  $V_{\mathcal{B}(p_i, p_{i+1})}$ : un point  $p \in V_{\mathcal{B}(p_i, p_{i+1})}$  est considéré comme un sommet de  $\mathcal{P}(X)$  si le segment droit formé par  $q$  et  $p$  satisfait deux conditions : (1) il ne contient aucun point  $r \notin X$  qui se situe à droite du segment et (2) la distance entre  $q$  et  $p$  est la plus longue possible. Itérer en assignant  $q = p$  jusqu'à  $p = p_{i+1}$ .

La figure 5(d–f) illustre cet algorithme de construction de l'arbre de concavités basé sur des polygones.

## 5.2. Arbre de concavités basé sur des polygones

Soit  $P$  un polygone, le principe pour construire l'arbre de concavités de  $P$  est similaire à l'approche présentée dans la section 4.1. Au lieu d'utiliser les enveloppes convexes des parties concaves, nous utilisons le polygone de l'objet. Plus précisément, la racine de l'arbre correspond à l'enveloppe convexe de  $P$  et chaque nœud correspond au polygone d'une partie concave de ses parents. Chaque polygone correspondant à une telle partie concave  $P'$  est obtenu comme un composante connexe de la soustraction entre  $\text{Conv}(P)$  et  $P$ . Plus formellement, on a  $P' \in \mathcal{C}(\text{Conv}(P) \setminus P)$  :

$$P = \text{Conv}(P) \setminus \left( \bigcup_{P' \in \mathcal{C}(\text{Conv}(P) \setminus P)} P' \right) \quad (10)$$

Chaque polygone de la partie concave  $P'$ , s'il n'est pas lui-même un polygone convexe, est remplacé récursivement par la soustraction des polygones non-convexes de  $P'$  dans  $\text{Conv}(P')$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de polygone non-convexe trouvé. Par construction, on a  $V_{\text{Conv}(P)} \subseteq V_P$  (et  $V_{\text{Conv}(P)} = V_P$  si  $P$  est convexe). Pour chaque polygone  $P'$  déterminé tel que ci-dessus, nous avons : (1)  $V_{P'} \subset V_P$ , et (2) deux nœuds connectés dans l'arbre de concavités partagent des arêtes communes. En conséquence, il n'y a pas de décalage entre des régions convexes dans l'arbre de concavités construit. La figure 5(d–f) est un exemple d'arbre de concavités de l'objet discret de la figure 5(a), dont le polygone est obtenu par le processus de polygonation proposé en section 5.1.

Avec la structure de l'arbre de concavités d'un polygone, nous pouvons définir la transformation rigide de ce polygone comme suit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\text{Poly}}(P) & \quad (11) \\ &= \mathfrak{T} \left( (\text{Conv}(P)) \setminus \left( \bigcup_{P' \in \mathcal{C}(\text{Conv}(P) \setminus P)} P' \right) \right) \\ &= \left( \bigcap_{H \in \mathcal{R}(\text{Conv}(P))} \mathfrak{T}(H) \right) \setminus \left( \bigcup_{P' \in \mathcal{C}(\text{Conv}(P) \setminus P)} \mathfrak{T}_{\text{Poly}}(P') \right) \end{aligned}$$

Notez que chaque enveloppe convexe du polygone est représentée par des demi-plans d'après l'équation (3).

En utilisant l'équation (11) sur le polygone  $\mathcal{P}(X)$  de  $X$ , c'est-à-dire  $P = \mathcal{P}(X)$ , nous pouvons réaliser les transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$  en préservant la structure de l'arbre de concavités. Autrement dit, ces transformations préservent la structure hiérarchique des parties convexes et concaves de l'objet.

Grâce aux équations (9–10), nous avons :

$$X = (\text{Conv}(P) \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \left( \bigcup_{P' \in \mathcal{C}(\text{Conv}(P) \setminus P)} (P' \cap \mathbb{Z}^2) \right)$$

Puis la transformation rigide de  $X$  est obtenue comme :

$$\mathcal{T}_{\text{Poly}}(X) = \mathfrak{T}_{\text{Poly}}(\mathcal{P}(X)) \cap \mathbb{Z}^2 \quad (12)$$

## 6. Résultats et comparaisons

Dans cette section, nous présentons des résultats de transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$  obtenus, d'une part, avec l'approche basée sur les enveloppes convexes [NKDRP17] et, d'autre part, notre approche basée sur les polygones. Les résultats et comparaisons sont illustrés en figure 7. Nous pouvons notamment y observer que notre approche fournit un meilleur résultat, avec des parties concaves et convexe bien préservées. Comme attendu, l'approche proposée dans [NKDRP17] induit des défauts dans les images transformées : des points sont créés en dehors des objets et des trous apparaissent à l'intérieur des objets. Dans la dernière expérimentation, en figure 7, nous constatons que la forme de l'objet est également mieux préservée avec notre approche.

## 7. Conclusion

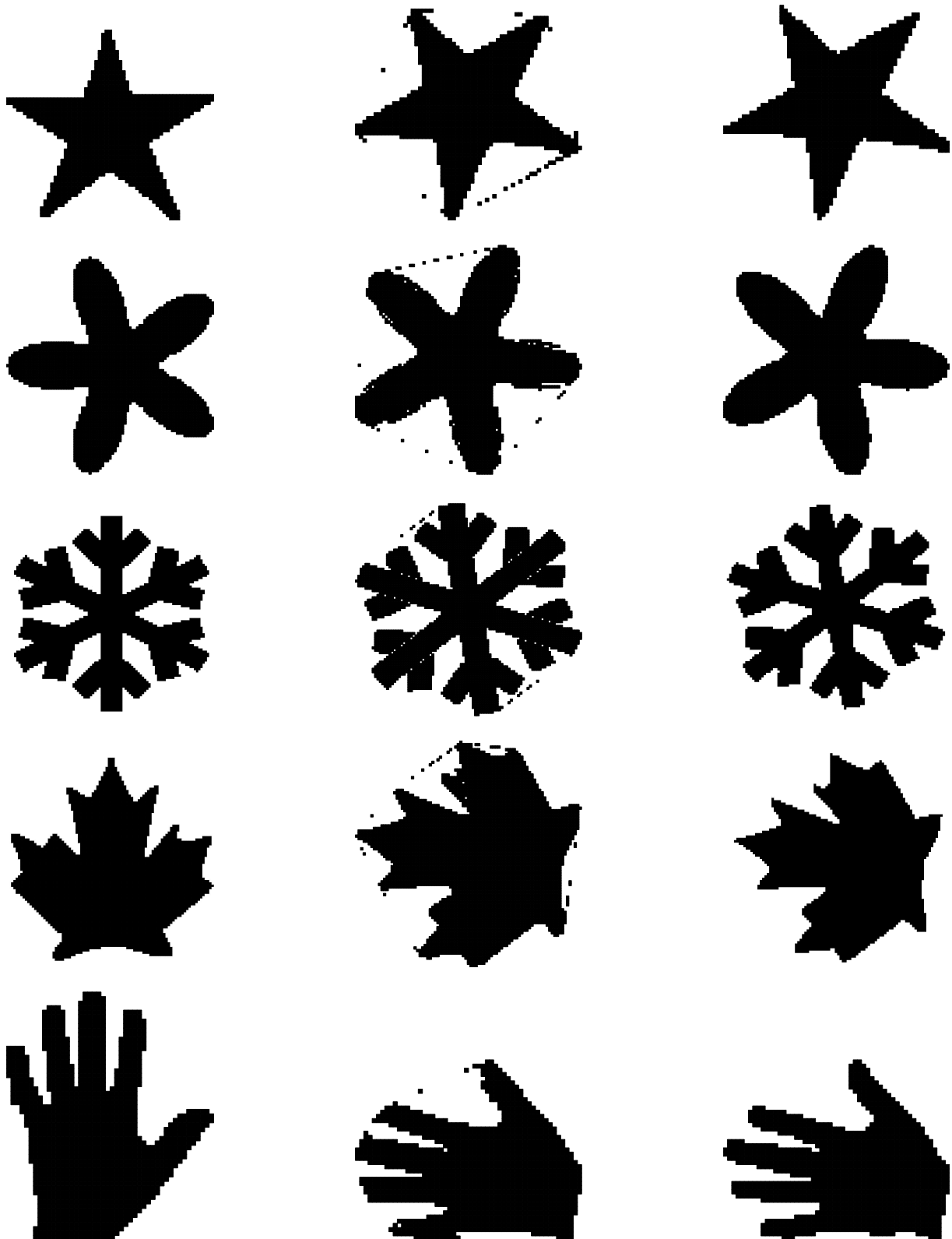
Dans cet article, nous avons exploité la méthode des transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$  proposée dans [NKDRP17]. Suite à l'analyse de ses défauts dans le cas des objets non-convexes, nous avons proposé une modification de cette méthode en nous basant sur une décomposition polygonale de l'objet discret. Les résultats expérimentaux montrent que la forme —les parties concaves et convexes— des objets est ainsi mieux conservée.

Dans ce papier, nous avons seulement considéré les images binaires contenant un seul objet sans trou. Nous envisageons, par la suite, de gérer les images contenant plusieurs objets en combinant l'arbre de composantes connexes et l'arbre de concavités. Une autre perspective est d'étendre la méthode en 3D.

## Références

- [AACPMCMC14] AGUILERA-AGUILERA E., CARMONA-POYATO A., MADRID-CUEVAS F., MEDINA-CARNICER R. : The computation of polygonal approximations for 2D contours based on a concavity tree. *Journal of Visual Communication and Image Representation*. Vol. 25, Num. 8 (2014), 1905–1917.
- [BdB96] BORGEFORS G., DI BAJA G. S. : Analyzing nonconvex 2D and 3D patterns. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 63, Num. 1 (1996), 145–157.
- [CL02] CRISTESCU G., LUPSA L. : *Non-connected convexities and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [Har85] HARTIGAN J. : Statistical theory in clustering. *Journal of Classification*. Vol. 2 (1985), 63–76.





**Figure 7:** Expérimentations et comparaisons de transformations rigides sur  $\mathbb{Z}^2$  entre l'approche basée sur les enveloppes convexes [NKDRP17] et notre approche basée sur les polygones. Première colonne : l'image originale ; deuxième colonne : l'image transformée par la méthode [NKDRP17] ; dernière colonne : l'image transformée par notre méthode.

- [Kim81] KIM C. E. : On the cellular convexity of complexes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 3, Num. 6 (1981), 617–625.
- [Kle13] KLETTE G. : Recursive computation of minimum-length polygons. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 117, Num. 4 (2013), 386–392.
- [KR04] KLETTE R., ROSENFELD A. : *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Elsevier, Amsterdam, Boston, 2004.
- [MP69] MINSKY M., PAPERT S. : *Perceptrons: An introduction to computational geometry*. MIT Press, Reading, 1969.
- [NKDRP17] NGO P., KENMOCHI Y., DEBLEDRENNESSON I., PASSAT N. : Convexity-preserving rigid motions of 2D digital objects. In *Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI) (2017)*, pp. 69–81.
- [NPKT14] NGO P., PASSAT N., KENMOCHI Y., TALBOT H. : Topology-preserving rigid transformation of 2D digital images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 23, Num. 2 (2014), 885–897.
- [Skl70] SKLANSKY J. : Recognition of convex blobs. *Pattern Recognition*. Vol. 2 (1970), 3–10.
- [Skl72] SKLANSKY J. : Measuring concavity on a rectangular mosaic. *IEEE Transactions on Computers*. Vol. 21, Num. 12 (1972), 1355–1364.
- [Wis69] WISHART D. : Mode analysis: A generalization of the nearest neighbor which reduces chaining effects. In *Numerical Taxonomy*, Cole A., (Ed.). Academic Press, 1969, pp. 282–319.
- [YJS06] YILMAZ A., JAVED O., SHAH M. : Object tracking: A survey. *ACM Computing Surveys*. Vol. 38, Num. 4 (2006), 1–45.
- [ZF03] ZITOVÁ B., FLUSSER J. : Image registration methods: A survey. *Image and Vision Computing*. Vol. 21, Num. 11 (2003), 977–1000.