



# Synthèse de contrôleurs D-stabilisants pour les modèles flous T-S

Abdelmadjid Cherifi, Kevin Guelton, Laurent Arcese

► **To cite this version:**

Abdelmadjid Cherifi, Kevin Guelton, Laurent Arcese. Synthèse de contrôleurs D-stabilisants pour les modèles flous T-S. 24èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2015), Nov 2015, Poitiers, France. hal-02109339

**HAL Id: hal-02109339**

**<https://hal.univ-reims.fr/hal-02109339>**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Synthèse de contrôleurs $\mathcal{D}$ -stabilisants pour les modèles flous T-S

Abdelmadjid Cherifi

Kevin Guelton

Laurent Arcese

CReSTIC EA3804, Université de Reims Champagne-Ardenne

Moulin de la housse BP1039, 51687 Reims cedex 2, France

email : Prénom.nom@univ-reims.fr

## Résumé :

Ce papier présente la synthèse de lois de commande non-PDC (Compensations-Parallèles-Distribuées) pour les modèles Takagi-Sugeno (T-S) continus assurant un placement de pôles de ses polytopes. Basée sur le concept de la  $\mathcal{D}$ -stabilité, une réponse désirée du système peut être obtenue en plaçant les pôles des polytopes en boucle fermée dans une région prédéfinie du plan complexe. Après avoir présenté ces conditions de  $\mathcal{D}$ -stabilité quadratiques pour les modèles T-S en boucle fermée, de nouvelles conditions sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMI}$ ) moins conservatives ont été obtenues en utilisant des Fonctions de Lyapunov Floues (FLF) impliquant une structure floue en double somme. L'efficacité des résultats proposés est illustrée par une comparaison entre les résultats présentés et les résultats de l'état de l'art et une simulation d'un modèle de bras de robot flexible.

## Mots-clés :

Modèles Takagi-Sugeno, Loi de commande non-PDC,  $\mathcal{D}$ -stabilité, LMI.

## 1 Introduction

Les modèles flous Takagi-Sugeno (T-S) [1] constituent une classe de systèmes polytopiques convexes permettant d'étendre certains concepts de l'automatique linéaire au cas non linéaire. Ainsi, un système non linéaire peut être représenté exactement par un modèle flou T-S sur un compact de l'espace d'état par le biais d'une décomposition en secteurs non linéaires [2]. Le problème de contrôle des modèles T-S est généralement étudié via la méthode directe de Lyapunov [2, 3]. Dans ce contexte, le défi consiste à exprimer les conditions de stabilité sous forme d'inégalité matricielle linéaire ( $\mathcal{LMI}$ ) [4] qui peuvent être résolues par des algorithmes d'optimisation convexe [5]. Les pre-

miers résultats de stabilisation ont été obtenus à partir d'une loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation) et de Fonctions de Lyapunov Quadratiques (FLQ) [3, 2]. Cependant ces méthodes exigent de trouver une solution commune pour un ensemble d'inégalités linéaires matricielles ( $\mathcal{LMI}$ s) (voir [6] concernant les sources de conservatisme dans les études des modèles T-S). Afin de réduire le conservatisme, d'autres fonctions de Lyapunov alternatives ont été considérées comme les fonctions de Lyapunov par morceaux [7], les fonctions de Lyapunov à commutation [8] et les fonctions de Lyapunov non-quadratiques ou encore appelées Fonctions de Lyapunov Floues (FLF) [9, 10, 11]. Dans ce contexte, le recours à des fonctions de Lyapunov non-quadratiques s'avère plus approprié. En effet, celles-ci sont basées sur la même structure d'interconnexion que les modèles T-S à analyser [9, 12]. Néanmoins, dans le cas continu, les dérivées temporelles des fonctions d'appartenance apparaissent dans les conditions de stabilité. Afin de contourner ce problème, de nombreux travaux sont basés sur l'hypothèse que ces dérivées sont bornées, et que leurs bornes sont connues avant la synthèse de la boucle fermée [9], ce qui peut s'avérer compliqué en pratique. Pour pallier ce problème, des conditions locales ont été proposées [13] mais qui, du fait de leur complexité, ne feront pas l'objet de la présente étude.

Dans ce papier, nous nous intéressons à de nouvelles conditions  $\mathcal{LMI}$  garantissant un

placement de pôles dans une région définie. En effet, assurer la stabilité asymptotique ne signifie pas nécessairement assurer une bonne réponse transitoire du système en boucle fermée. Dans ce contexte, certains travaux ont été réalisés afin d'améliorer la réponse transitoire en boucle fermée en ajoutant des contraintes de placement de pôle au problème de la stabilisation [14, 15]. Néanmoins, ces résultats sont donnés dans le cadre quadratique, qui présentent les limitations discutées ci-dessus. Par conséquent, après avoir présenté les concepts de base de la  $\mathcal{D}$ -stabilité [16] et leur extension aux modèles T-S dans le cadre quadratique, de nouvelles conditions non-quadratiques sont proposées via une FLF [17], impliquant une structure floue à double somme afin de réduire le conservatisme, sans toutefois tenir compte de l'estimation du domaine d'attraction, qui fera l'objet de travaux ultérieurs. Enfin, l'efficacité des résultats proposés sera illustrée à travers deux exemples en simulation.

## 2 Préliminaires

Considérons le modèle T-S donné par [1] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $z(t)$  sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de prémisses. Pour  $i \in \mathcal{I}_r = \{1, \dots, r\}$ ,  $h_i(z(t)) \in [0, 1]$  représentent des fonctions d'appartenance avec  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ .  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont les matrices réelles constantes définissant la dynamique du système.

Afin de stabiliser (1), considérons la loi de commande non-PDC donnée par [18] :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \left( \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) H_j \right)^{-1} x(t) \quad (2)$$

où  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des matrices de gain constantes à déterminer.

**Notations :** Dans la suite de cet article, les matrices sont supposées de dimensions appropriées. De plus, afin d'alléger les expressions mathématiques, le temps  $t$  ou les variables de prémisses  $z$  sont omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.  $M \succ 0$  (resp.  $\prec 0$ ) et  $I$  définissent respectivement une matrice définie positive (resp. négative) et une matrice identité de dimensions appropriées. Pour toute matrice carrée  $Q$ , on note  $\mathcal{H}(Q) = Q + Q^T$ . Dans une matrice, un astérisque (\*) désigne une quantité transposée. Soit un ensemble de matrices réelles  $M_i$  et  $N_{ij}$ , tel que pour tout  $i \in \mathcal{I}_r$ , on note  $M_z = \sum_{i=1}^r h_i(z) M_i$ ,  $N_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) N_{ij}$ . Enfin,  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

A partir des notations présentées ci-dessus, et en substituant (2) dans (1), la dynamique en boucle fermée s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}_{zz} x(t), \quad \tilde{A}_{zz} = A_z + B_z F_z H_z^{-1} \quad (3)$$

Par conséquent,  $\forall i \in \mathcal{I}_r$ , l'obtention des matrices  $F_i$  et  $H_i$  telle que la dynamique de la boucle fermée (3) soit stable garantit la stabilisation du modèle T-S (1) par la loi de commande non-PDC (2). L'objectif de ce travail est de proposer de nouvelles conditions  $\mathcal{LMF}$  pour la synthèse de (2) via le concept de  $\mathcal{D}$ -stabilité [16]. L'hypothèse, la définition et les lemmes suivants seront utilisés par la suite.

**Hypothèse 1.** Le modèle T-S (1) est supposé continu et dérivable  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\forall x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , où  $\Omega$  est l'espace de validité du modèle T-S.

**Définition 1.** (Région  $\mathcal{LMF}$ ) [16] : Un sous ensemble  $\mathcal{D}$  du plan complexe est appelé une région  $\mathcal{LMF}$  s'il est défini par deux matrices  $L = L^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  telles que :

$$\mathcal{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : L + \lambda M + \bar{\lambda} M^T < 0\} \quad (4)$$

où  $d$  est appelé l'ordre de la région  $\mathcal{LMI}$ .

Par la suite, nous allons considérer la région  $\mathcal{LMI}$  définie ci-dessous et représentée par la figure 1 :

1. le plan gauche définie par  $\mathcal{R}e(\lambda) < \beta$ ,
2. le secteur conique définie par son apex en  $(\gamma, 0)$  et un angle  $\pi/2 - \theta$ ,
3. un cercle centré en  $(q, 0)$  avec un rayon  $s$ ,

conduisant aux matrices suivantes :

$$L = \begin{bmatrix} -2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\gamma \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -q \\ 0 & 0 & 0 & -q & -s \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pour plus de détails et exemples illustrant comment obtenir les matrices  $L$  et  $M$  pour différentes régions  $\mathcal{LMI}$  le lecteur peut consulter [16, 19].

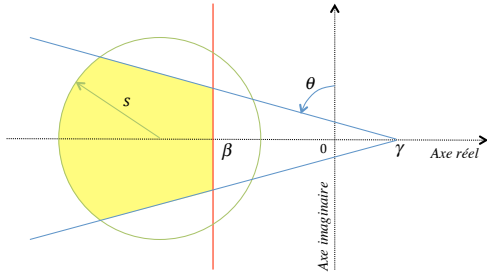


Figure 1 – Région  $\mathcal{LMI}$  définie par (5) et (6).

**Lemme 1.** ( $\mathcal{D}$ -stabilité)[16] : Soit une région  $\mathcal{LMI}$  définie par (4). Un système dynamique (e.g. la boucle fermée d'un modèle flou T-S (3)) est dit  $\mathcal{D}$ -stable s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  vérifiant :  $\frac{1}{2} \dot{V}(x) \in \mathcal{D}$ , i.e. :

$$L \otimes V(x) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{V}(x) \prec 0 \quad (7)$$

Notons que, afin de réduire le conservatisme des conditions LMI proposées, de nombreux lemmes sont dédiés au découplage de termes croisés (relaxation de sommes) [6]. Dans la suite, le lemme suivant est employé, alors qu'il ne constitue pas la meilleure alternative, pour permettre une comparaison avec des travaux récents [15], sans altérer la mise en évidence du gain de conservatisme apporté dans le cadre de cette étude et qui relève de l'application de fonctions de Lyapunov non-quadratiques.

**Lemme 2.** [20] : Soient  $\Gamma_{ij}$ , pour  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ , des matrices de dimension appropriées.  $\Gamma_{zz} \prec 0$  est vérifiée si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} \prec 0, \quad i \leq j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_r^2, \quad (8)$$

Dans le cas quadratique, de premières conditions de  $\mathcal{D}$ -stabilisation ont été proposées [15]. Celles-ci sont résumées par le lemme suivant :

**Lemme 3.** [15] : Soit  $L$  et  $M$  deux matrices définissant une région LMI (voir définition 1). S'il existe des matrices  $P = P^T \succ 0$ , et  $F_j$  telles que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes soient vérifiées :

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} \prec 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I}_r^2 \quad (9)$$

$$\Psi_{ij} = L \otimes P + \mathcal{H}e(M \otimes (A_i P + B_i F_j)), \quad (10)$$

alors le modèle T-S (3) est  $\mathcal{D}$ -stabilisé par la loi de commande (2) avec  $H_i = P$  commun.

Notons que les conditions du théorème 3 ont été obtenues avec la fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x(t)) = x^T(t) P^{-1} x(t), \quad P = P^T \succ 0 \quad (11)$$

De plus, elles ne permettent la synthèse que d'une loi de commande PDC, i.e.  $H_z = P$  dans (2), et sont donc conservatives.

Dans la suite, on propose des conditions de  $\mathcal{D}$ -stabilité non-quadratique où  $H_z$  n'est

plus nécessairement symétrique et peut être découplée des matrices de Lyapunov. De plus, pour réduire le conservatisme, une fonction de Lyapunov non-quadratique, impliquant une double somme [17], sera utilisée.

### 3 Résultats principaux

Dans cette section, l'objectif est de proposer de nouvelles condition  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$  pour la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires (1) par la loi de commande non-PDC (2). Cette loi de commande doit garantir un placement de pôles du système en boucle fermée dans une région  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$  prédéfinie. Ce résultat est résumé par le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Sous l'hypothèse 1, on suppose que  $\forall k \in \mathcal{I}_r$ ,  $\exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(x)) \leq 0$ ,  $\phi_k \neq -\infty$ . Supposons les  $\phi_k$  connus et  $L$  et  $M$  deux matrices définissant une région  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$ . Pour  $(i, j, k) \in \mathcal{I}_r^3$ , s'il existe les matrices  $\tilde{X}_{ij} = \tilde{X}_{ij}^T$ ,  $\tilde{R}_{ij} = \tilde{R}_{ij}^T$ ,  $H_j$ ,  $F_j$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$ , tels que les conditions (12), (13) et (14) soient vérifiées, alors le modèle T-S (3) est  $\mathcal{D}$ -stabilisé par la loi de commande non-PDC (2).*

$$\tilde{X}_{ij} + \tilde{X}_{ji} \succ 0, \quad i \leq j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_r^2, \quad (12)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{ijk} + \tilde{\mathcal{X}}_{jik} \succ 0, \quad i \leq j, \quad (i, j, k) \in \mathcal{I}_r^3, \quad (13)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} \prec 0, \quad i \leq j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_r^2, \quad (14)$$

avec  $\tilde{\mathcal{X}}_{ijk} = \tilde{X}_{kj} + \tilde{X}_{ik} + \tilde{R}_{ij}$ ,

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{ij}^{(1,1)} & (*) \\ \Upsilon_{ij}^{(1,2)} & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_j) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{ij}^{(1,1)} = L \otimes \tilde{X}_{ij} + \mathcal{H}\left(M \otimes \left(A_i H_j + B_i F_j - \tilde{\Phi}_{ij}\right)\right),$$

$$\Upsilon_{ij}^{(1,2)} = M \otimes (\tilde{X}_{ij} - H_j) + \varepsilon I \otimes (H_j^T A_i^T + F_j^T B_i^T),$$

$$\tilde{\Phi}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \phi_k \tilde{\mathcal{X}}_{ijk}.$$

*Démonstration.* Considérons la FLF donnée par [17] :

$$\tilde{V}(x(t)) = x^T(t) \tilde{X}_{zz}^{-1} x(t) \quad (15)$$

Le système en boucle fermée (3) est stable si,  $\forall i \in \mathcal{I}_r$ ,  $\tilde{X}_{ij} = \tilde{X}_{ij}^T \succ 0$  et :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T \tilde{X}_{zz}^{-1} x + x^T \tilde{X}_{zz}^{-1} \dot{x} + x^T \dot{\tilde{X}}_{zz}^{-1} x \\ &= 2x^T \left( \tilde{A}_{zz}^T \tilde{X}_{zz}^{-1} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz}^{-1} \right) x \\ &= 2x^T \left( \tilde{X}_{zz}^{-1} \tilde{A}_{zz} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz}^{-1} \right) x < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

A partir du lemme 1 et sachant que  $V(x) > 0$ , la boucle fermée du modèle T-S (3) est  $\mathcal{D}$ -stable si :

$$L \otimes \tilde{V}(x) + M \otimes \frac{1}{2} \dot{\tilde{V}}(x) + M^T \otimes \frac{1}{2} \dot{\tilde{V}}(x) \prec 0 \quad (17)$$

On pose  $Z_{zz} = \tilde{X}_{zz}^{-1} \tilde{A}_{zz} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz}^{-1}$ , (17) s'écrit alors :

$$L \otimes x^T \tilde{X}_{xx}^{-1} x + \mathcal{H}(M \otimes x^T Z_{xx} x) \prec 0 \quad (18)$$

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker, (18) devient :

$$\mu^T \left( L \otimes \tilde{X}_{zz}^{-1} + \mathcal{H}(M \otimes Z_{zz}) \right) \mu \prec 0 \quad (19)$$

avec  $\mu = I \otimes x$ . D'où,  $\forall x$  :

$$L \otimes \tilde{X}_{zz}^{-1} + \mathcal{H}(M \otimes Z_{zz}) \prec 0 \quad (20)$$

En multipliant à gauche et à droite (20) par  $(I \otimes \tilde{X}_z)$  et comme  $\tilde{X}_{zz} \dot{\tilde{X}}_{zz}^{-1} \tilde{X}_{zz} = -\dot{\tilde{X}}_{zz}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} L \otimes \tilde{X}_{zz} - \mathcal{H}\left(M \otimes \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz}\right) \\ + \mathcal{H}\left(M \otimes \tilde{A}_{zz} \tilde{X}_{zz}\right) \prec 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Considérons à présent un scalaire arbitraire  $\varepsilon$  et introduisons les termes nuls :

$$\mathcal{H}(M \otimes \tilde{A}_{zz} H_z) - \mathcal{H}(M \otimes \tilde{A}_{zz} H_z) = 0 \quad (22)$$

et

$$\mathcal{H}(\varepsilon I \otimes \tilde{A}_{zz} H_z^T \tilde{A}_{zz}^T) - \mathcal{H}(\varepsilon I \otimes \tilde{A}_{zz} H_z \tilde{A}_{zz}^T) = 0 \quad (23)$$

En additionnant (21) avec (22) et (23), on obtient :

$$\begin{aligned} L \otimes \tilde{X}_{zz} - \mathcal{H}\left(M \otimes \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz}\right) + \mathcal{H}(M \otimes \tilde{A}_{zz} H_z) \\ + \mathcal{H}(M \otimes \tilde{A}_{zz} \tilde{X}_{zz} - M \otimes \tilde{A}_{zz} H_z + \varepsilon I \otimes \tilde{A}_{zz} H_z^T \tilde{A}_{zz}^T) \\ - \varepsilon I \otimes \mathcal{H}(\tilde{A}_{zz} H_z \tilde{A}_{zz}^T) \prec 0 \end{aligned} \quad (24)$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} & L \otimes \tilde{X}_{zz} + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( \tilde{A}_{zz} H_z - \frac{1}{2} \dot{\tilde{X}}_{zz} \right) \right) \\ & + \mathcal{H} \left( (I \otimes \tilde{A}_{zz}) (M \otimes (\tilde{X}_{zz} - H_z) + \varepsilon I \otimes H_z^T \tilde{A}_{zz}^T) \right) \\ & (I \otimes \tilde{A}_{zz}) (-\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_z)) (I \otimes \tilde{A}_{zz}^T) \prec 0 \end{aligned} \quad (25)$$

On note que  $\sum_{i=1}^r \dot{h}_i(z) = 0$ , pour toutes matrices symétriques  $\tilde{R}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  on a :

$$\dot{\tilde{X}}_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \sum_{k=1}^r \dot{h}_k(z) \tilde{\mathcal{X}}_{ijk} \quad (26)$$

avec  $\tilde{\mathcal{X}}_{ijk} = \tilde{X}_{kj} + \tilde{X}_{ik} + \tilde{R}_{ij}$

Sous l'hypothèse 1, on suppose que  $\forall k \in \mathcal{I}_r$ ,  $\exists \phi_k = \inf_{x \in \Omega} (\dot{h}_k(x)) \leq 0$ ,  $\phi_k \neq -\infty$ . L'inégalité (25) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} & L \otimes \tilde{X}_{zz} + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( \tilde{A}_{zz} H_z - \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{zz} \right) \right) \\ & + \mathcal{H} \left( (I \otimes \tilde{A}_{zz}) (M \otimes (\tilde{X}_{zz} - H_z) + \varepsilon I \otimes H_z^T \tilde{A}_{zz}^T) \right) \\ & (I \otimes \tilde{A}_{zz}) (-\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_z)) (I \otimes \tilde{A}_{zz}^T) \prec 0 \end{aligned} \quad (27)$$

avec  $\tilde{\Phi}_{zz} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \sum_{k=1}^r \phi_k \tilde{\mathcal{X}}_{ijk}$  et :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \tilde{\mathcal{X}}_{ijk} \succ 0 \quad (28)$$

En appliquant le lemme 2, (28) est vérifiée si (13) est vérifiée. (27) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} I \\ I \otimes \tilde{A}_{zz} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Upsilon_{zz}^{(1,1)} & (*) \\ \Upsilon_{zz}^{(1,2)} & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \otimes \tilde{A}_{zz} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (29)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{zz}^{(1,1)} &= L \otimes \tilde{X}_{zz} + \mathcal{H} \left( M \otimes \left( \tilde{A}_{zz} H_z - \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{zz} \right) \right) \\ \Upsilon_{zz}^{(1,2)} &= M \otimes (\tilde{X}_{zz} - H_z) + \varepsilon I \otimes H_z^T \tilde{A}_{zz}^T \end{aligned}$$

L'inégalité (29) est vérifiée si :

$$\Upsilon_{zz} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{zz}^{(1,1)} & (*) \\ \Upsilon_{zz}^{(1,2)} & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_z) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (30)$$

Finalement, en appliquant le lemme 2, (30) est vérifiée si (14) est vérifiée.  $\square$

**Remarque 1.** Les conditions présentées dans le théorème 1 ne sont pas strictement  $\mathcal{LMI}$  car elles nécessitent la connaissance d'un paramètre  $\varepsilon$ , qui doit être fixé à l'avance. Notons que dans la preuve du théorème 2, l'introduction de ce paramètre n'est plus obligatoire. Nous avons néanmoins choisi de le laisser afin de donner plus de liberté au choix de  $U_h$  et  $V_h$ . Ce paramètre est usuellement choisi dans une famille logarithmique telle que  $\varepsilon \in \{10^{-6}, 10^{-5}, \dots, 10^6\}$  (voir par exemple [18] ou [21]).

**Remarque 2.** Les conditions présentées dans le théorème 1 sont moins conservatives que celles présentées dans le lemme 3. Néanmoins, les conditions obtenues via une fonction de Lyapunov non-quadratique sont des conditions locales et ne garantissent la stabilité que dans un sous-espace appelé "Domaine d'attraction (DA)" qu'il conviendrait d'estimer et qui fera l'objet de travaux ultérieurs. Dans le corollaire suivant, une forme quadratique du théorème 1 est présentée. Le résultat obtenu est plus conservatif mais garantit une stabilité globale.

**Corollaire 1.** Soient  $L$  et  $M$  deux matrices définissant une région  $\mathcal{LMI}$ . Pour  $(i, j) \in \mathcal{I}_r^2$ , s'il existe les matrices  $P = P^T \succ 0$ ,  $H_j$ ,  $F_j$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$ , tels que la condition (31) soit vérifiée, alors le modèle T-S (3) est  $\mathcal{D}$ -stabilisé par la loi de commande non-PDC (2).

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} \prec 0, \quad i \leq j, \quad (i, j) \in \mathcal{I}_r^2, \quad (31)$$

avec :

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Xi_{ij}^{(1,1)} & (*) \\ \Xi_{ij}^{(1,2)} & -\varepsilon I \otimes \mathcal{H}(H_j) \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{ij}^{(1,1)} = L \otimes P + \mathcal{H} (M \otimes (A_i H_j + B_i F_j)),$$

$$\Xi_{ij}^{(1,2)} = M \otimes (P - H_j) + \varepsilon I \otimes (H_j^T A_i^T + F_j^T B_i^T),$$

*Démonstration.* Triviale en fixant  $\tilde{X}_{ij} = P = P^T \succ 0$  commune et  $\tilde{R}_{ij} = -2P$  dans les conditions du théorème 1.  $\square$

**Remarque 3.** Bien que quadratiques, les conditions du corollaire 1 permettent néanmoins la synthèse d'une loi de commande non-PDC (2). Ces conditions sont donc moins conservatives que le lemme 3.

## 4 Exemples de simulation

### 4.1 Exemple 1

Soit le modèle T-S donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (32)$$

avec  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ ,  $h_1(x_1) = (1 - \sin(x_1))/2$ ,  $h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$  et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont dédiés à comparer les domaines de faisabilité obtenus, tracé dans la figure 2, du théorème 1, du corollaire 1 et du lemme 3 [15]. Les domaines de faisabilité ont été obtenus via la  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$  Toolbox de Matlab [5] avec  $s = 5$ ,  $q = -8$ ,  $\beta = 5$ ,  $\theta = 9\pi/20$ ,  $\gamma = 1$  et  $\varepsilon \in [10^{-6}, 10^6]$  (voir remarque 1). La figure 2 confirme la réduction du conservatisme escomptée.

### 4.2 Exemple 2

Soit le bras de robot flexible représenté dans la figure 3 [22].

La dynamique non linéaire de ce robot peut être exactement représentée par le modèle T-S suivant [21] :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1(t))A_i x(t) + B u(t) \quad (33)$$

où  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  est le vecteur d'état,  $x_1$  et  $x_2$  sont respectivement les positions angulaires du bras et de l'actionneur,  $x_3 = \dot{x}_1$  et

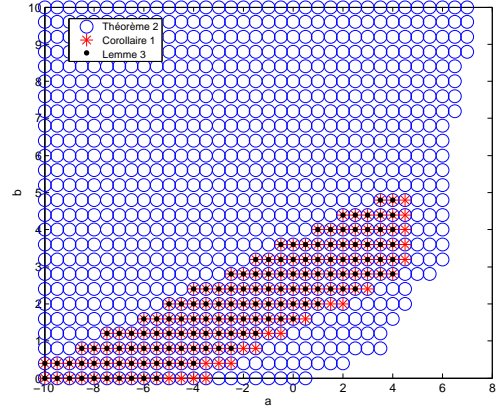


Figure 2 – Comparaison des domaines de faisabilité du théorème 1, du corollaire 1 et du lemme 3 [15].

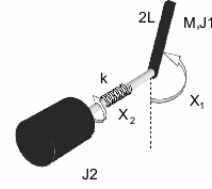


Figure 3 – Bras de robot flexible [22].

$x_4 = \dot{x}_2$ ,  $u$  est l'entrée,  $h_1(x_1) = 1 - h_2(x_1)$  avec  $h_2(x_1) = (1 - f(x_1))/(1 + \rho)$  et,  $\forall x_1$   $f(x_1) = \sin x_1/x_1 \in [\rho; 1]$  avec  $\rho = \min(\sin x_1/x_1) \approx -0,2172$  et :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k-mgL}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k-mgL\rho}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & \frac{k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

où  $J_1 = J_2 = 1 \text{ kg.m}^2$  sont les inerties de l'actionneur et du bras,  $m = 1 \text{ kg}$  est la masse du bras,  $L = 1 \text{ m}$  est la longueur du bras,  $k = 100 \text{ N.m.rad}^{-1}$  est la raideur du ressort,  $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$  est l'accélération de la gravité.

Un contrôleur non-PDC (2) a été synthétisé au travers du théorème 1, via la toolbox  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$  de MATLAB [5], avec la région  $\mathcal{LM}\mathcal{I}$

définie précédemment pour  $s = 8$ ,  $q = 7$ ,  $\beta = 3$ ,  $\theta = \pi/5$ ,  $\gamma = 3$  et  $\phi_1 = \phi_2 = -2$ . La solution avec  $\varepsilon = 0.008$  est donnée par les matrices gain de la loi de commande non-PDC (2) suivantes :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.015 & 0.016 & -0.055 & -0.036 \\ 0.016 & 0.018 & -0.075 & -0.069 \\ -0.056 & -0.076 & 0.407 & 0.414 \\ -0.036 & -0.069 & 0.417 & 0.639 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.020 & 0.020 & -0.066 & -0.049 \\ 0.020 & 0.023 & -0.083 & -0.080 \\ -0.067 & -0.083 & 0.410 & 0.393 \\ -0.049 & -0.081 & 0.396 & 0.633 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [ -0.151 \quad 0.230 \quad -2.753 \quad -8.072 ],$$

$$F_2 = [ -0.135 \quad 0.317 \quad -2.062 \quad -8.013 ].$$

La figure 4 montre les trajectoires de l'état du système en boucle fermée, la dérivé temporelle des fonctions d'activation ainsi que l'emplacement des pôles, pour les conditions initiales  $x(0) = [-\pi/5 \quad \pi/5 \quad 0 \quad 0]^T$ . On notera que l'hypothèse  $\dot{h}_k(z) \geq \phi_k = -2$  est vérifiée dans cette simulation.

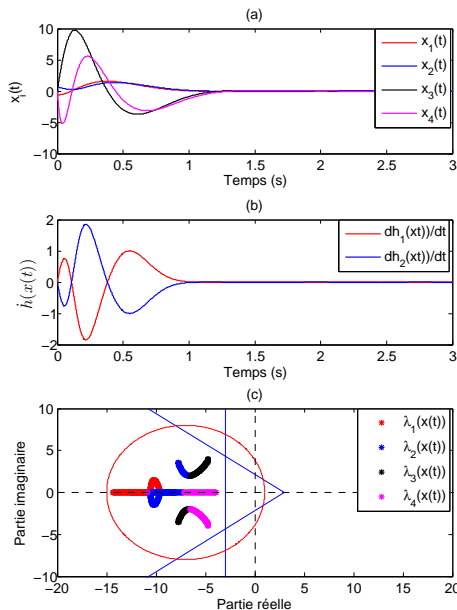


Figure 4 – Simulation : (a) trajectoires en boucle fermée, (b) dérivé des fonctions d'appartenance, (c) pôles du système.

### 4.3 Conclusion

Dans cet article, la synthèse de contrôleurs non-PDC garantissant le placement de pôles

pour les modèles T-S a été proposée en se basant sur le concept de la  $\mathcal{D}$ -stabilité. Des résultats moins conservatifs ont été obtenus à partir d'une Fonction de Lyapunov Floue impliquant une structure à double somme suivi d'un corollaire quadratique. Deux exemples ont été présentés afin de montrer l'efficacité des approches proposées.

## 5 Remerciements

Les auteurs remercient M. Paul Plaissemant pour ses remarques pertinentes.

## Références

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [2] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [3] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues," *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 1, pp. 14–23, 1996.
- [4] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [5] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali, *MATLAB LMI control toolbox*, 1995.
- [6] A. Sala, "On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems," *Annual Review in Control*, vol. 33, no. 1, pp. 48–58, 2009.
- [7] M. Johansson, A. Rantzer, and K. Arzen, "Piecewise quadratic stability of fuzzy systems," *IEEE Transaction on*



- Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 7, pp. 713–722, 1999.
- [8] D. Jabri, K. Guelton, N. Manamanni, A. Jaadari, and C. D. Chinh, “Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law,” *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 14, no. 2, pp. 40–49, 2012.
- [9] K. Tanaka, T. Hori, and H. O. Wang, “A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 582–589, 2003.
- [10] T. M. Guerra and L. Vermeiren, “Lmi-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi–sugeno’s form,” *Automatica*, vol. 40, no. 5, pp. 823–829, 2004.
- [11] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, F. O. Souza, and E. M. A. M. Mendes, “Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems,” *Automatica*, vol. 45, pp. 1580–1583, 2009.
- [12] L. Mozelli, R. Palhares, and G. Avelar, “A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems,” *Information Sciences*, vol. 179, no. 8, pp. 1149–1162, 2009.
- [13] T.-M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton, and S. Labiod, “Nonquadratic local stabilization for continuous-time takagi–sugeno models,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 201, pp. 40–54, 2012.
- [14] P.-F. Toulotte, S. Delprat, T.-M. Guerra, and J. Boonaert, “Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in lmi region,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 21, no. 5, pp. 756–768, 2008.
- [15] W. Assawinchaichote, “Further results on robust fuzzy dynamic systems with lmi d-stability constraints,” *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 24, no. 4, pp. 785–794, 2014.
- [16] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian, “Robust pole placement in lmi regions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 12, pp. 2257–2270, 1999.
- [17] D. H. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo, “A fuzzy lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time takagi–sugeno fuzzy systems,” *Information Sciences*, vol. 185, no. 1, pp. 230–248, 2012.
- [18] A. Jaadari, T.-M. Guerra, A. Sala, M. Bernal, and K. Guelton, “New controllers and new designs for continuous-time takagi–sugeno models.” in *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Brisbane, Australia, 2012, pp. 1–7.
- [19] O. Bachelier, “Commande des systemes linéaires incertains : placement de pôles robuste en d-stabilité,” Ph.D. dissertation, Institut national des sciences appliquées de Toulouse, France, 1998.
- [20] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, “Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and lmi-based designs,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 250–265, 1998.
- [21] A. Cherifi, K. Guelton, and L. Arcese, “Quadratic design of d-stabilizing nonpdc controllers for quasi-lpv/t-s models,” in *1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, Grenoble, France, October 2015.
- [22] M. Seidi, M. Hajiaghdamemar, and B. Segee, “Fuzzy control systems : Lmi-based design,” in *Fuzzy Controllers-Recent Advances in Theory and Applications*, S. Iqbal, N. Boumella, and J. F. Garcia, Eds. InTech, 2012, ch. 18, pp. 441–464.