Négation et quantification dans la classe de mathématiques

Viviane Durand-Guerrier

Négation et quantification dans la classe de mathématiques

Viviane Durand-Guerrier
Université de Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck
UMR CNRS UM 5149
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Introduction

Lorsque nous proposons en formation des enseignants de mathématiques de travailler sur la négation, une réponse fréquente est que ce n'est pas nécessaire, car la négation est une notion simple, que les élèves utilisent depuis l'école primaire. Si tel était le cas, on pourrait s'attendre à ce que les élèves en fin d'études secondaires aient une maîtrise de la négation suffisante pour les besoins de l'activité mathématique sur laquelle il serait possible de s'appuyer à l'entrée dans l'enseignement supérieur. Or dans le cadre des travaux que nous conduisons en didactique et épistémologie des mathématiques, nous avons montré que ce n'est pas le cas (Durand-Guerrier, 2013). En effet on observe des difficultés persistantes à nier les énoncés quantifiés chez les étudiants et chez les enseignants en formation initiale et continue.

Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés persistantes sont l'indice qu'il y a des difficultés qui tiennent à la complexité de la notion elle-même qui, au-delà de son apparente simplicité, articule dans ses usages les aspects syntaxique, sémantique et pragmatique au sens de Morris (1938).

Pour mettre en évidence cette complexité, nous présentons tout d'abord les principaux résultats d'une étude épistémologique circonscrite (Aristote, Frege 1971, Russell 1903, Tarski 1933) conduite par I. Ben Kilani dans le contexte tunisien comme préalable à son étude didactique (Durand-Guerrier et Ben Kilani, 2004). Après avoir rappelé quelques résultats sur les ambiguïtés sémantiques liées à la négation, nous montrons l'intérêt d'une analyse logique des énoncés mathématiques pour mettre en lumière les difficultés potentielles que pourraient rencontrer les élèves et les étudiants lorsqu'ils doivent nier un énoncé mathématique mettant en jeu une quantification implicite ou explicite. Nous présentons ensuite quelques résultats appuyés sur des données empiriques montrant que les difficultés identifiées *a priori* par nos analyses sont bien réelles pour les étudiants scientifiques arrivant à l'université, et qu'elles sont renforcées en situation de bilinguisme.

La négation mathématique entre syntaxe, sémantique et pragmatique

Comme le souligne Gardies (2004 : 12-13) à propos de la géométrie grecque, l'usage des termes mathématiques présuppose la reconnaissance de la possession (ou non) par ces termes de certains propriétés auquel il convient d'ajouter les relations (binaires, ternaires, etc.) que peuvent entretenir (ou non) ces objets entre eux. De ce fait, dans le cadre de l'activité mathématique, la notion de négation qui est à l'œuvre[1] est la négation logique qui échange les valeurs de vérité des propositions et son extension aux propriétés et aux relations dans le cadre du calcul des prédicats[2] du premier ordre. On la rencontre dès l'antiquité grecque, et son étude est reprise par les logiciens qui au 19e siècle et au début du 20e siècle contribuent au renouveau de la logique.

Syntaxe, sémantique, pragmatique

Dans nos travaux de recherche en didactique sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, nous avons adopté un point de vue qui remonte à Morris (1938), pour qui la science du langage se divise en syntaxe, sémantique et pragmatique. Nous utilisons le terme « pragmatique » au sens restreint qu'il prend lorsqu'il est considéré en articulation avec la syntaxe et la sémantique :

> Sémantique : le signe est conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ;

---

[1] À tout le moins à l'école primaire, dans le secondaire et dans les premières années d'université.

[2] Le calcul des prédicats du premier ordre permet d'analyser les énoncés ; les lettres de prédicats servent à modéliser les propriétés et les relations.

> Syntaxe : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon des règles de combinaison […] ;
>
> Pragmatique : le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur ses destinataires, des usages qu'ils en font. (Eco, 1988 : 41)

Alors que l'on pourrait penser que la syntaxe et la sémantique sont suffisantes pour traiter des sciences logico-mathématiques, N.C.A. Da Costa soutient que « les trois niveaux – syntaxique, sémantique et pragmatique - sont essentiels pour la compréhension parfaite de l'état actuel des disciplines logico-mathématiques » (Da Costa, 1997 : 40). Nous avons montré dans nos travaux que c'est aussi le cas pour une étude didactique de ces disciplines (Durand-Guerrier, 2005 : 113-147).

Négation et contraire chez Aristote

Dans le livre 2 de l'Organon, *De l'interprétation*[3], Aristote définit deux formes d'opposition. La première forme est *la contradiction* qui échange le vrai et le faux. Elle s'applique d'une part aux phrases singulières, comme par exemple :

(1) Socrate est mortel / Socrate n'est pas mortel,

et d'autre part aux phrases quantifiées, telles que :

(2) Tout homme est blanc / Quelque homme n'est pas blanc.

(3) Nul homme n'est blanc/ Quelque homme est blanc.

Des deux phrases, *dans un contexte donné*, nécessairement l'une est vraie et l'autre est fausse. Ceci correspond à la négation logique qui échange les valeurs de vérité, tout en respectant des critères syntaxiques.

La deuxième forme d'opposition est *la contrariété* qui s'applique aux phrases universellement quantifiées, comme par exemple

(4) Tout homme est blanc / Nul homme n'est blanc.

Ces deux phrases peuvent être *simultanément fausses* ; elles ne peuvent jamais être simultanément vraies. Cette forme d'opposition est plus radicale que la contradiction et s'apparente au contraire.

---

[3] Nous utilisons la traduction due à Jean Tricot, publiée aux éditions Vrin en 1990.

Aristote insiste sur le fait qu'il n'y a pas de relation d'opposition entre les deux phrases existentielles (particulières) :

(5) Quelque homme est blanc / Quelque homme n'est pas blanc.

En effet, ces deux phrases peuvent être simultanément vraies. La logique d'Aristote est une logique des termes qui met en jeu des propriétés d'objets et qui peut s'interpréter dans le calcul moderne des prédicats du premier ordre. Elle rend visible un élément essentiel : dans une langue donnée, la négation doit respecter une forme syntaxique (des règles de construction précises) contrôlée par un critère sémantique (l'échange des valeurs de vérité pour les propositions[4]).

Rendre visible la portée de la négation pour des énoncés quantifiés

Au 19e siècle, Frege et Russell insistent sur la nécessité de rendre explicite la portée de la négation, ce que permettent de faire les langages symboliques. Frege (1971) utilise pour cela les ressources de son idéographie (*l'écriture des idées*) pour indiquer clairement si la négation porte sur la totalité de la phrase ou sur le prédicat. Cette possibilité d'expliciter la portée de la négation permet d'éliminer les ambiguïtés que l'on rencontre dans certaines langues comme le français où les énoncés de la forme « *Tous ne pas* » peuvent donner lieu à deux interprétations (nous revenons sur ce point dans la suite de ce texte). Cette idéographie de Frege, bien que très efficace pour mettre en évidence la syntaxe des énoncés formels, a été supplantée dans l'usage par celle introduite par Russell (1903) à la suite de Peano (1894), plus proche du symbolisme logique utilisé aujourd'hui en mathématiques, et moins gourmande en espace. Ce formalisme permet également de mettre en évidence la portée de la négation dans un énoncé formel universellement quantifié "$(\forall x P(x))$" (1), selon que la négation est en tête de la formule "$\neg(\forall x P(x))$"(2), ou à l'intérieur de la formule devant le prédicat : "$\forall \mathrm{x} \neg(\mathrm{P}(\mathrm{x}))$"(3). Russell ajoute que « c'est évidemment une erreur, quoique facile à commettre que de supposer que (1) et (3) sont la contradictoire l'une de l'autre (Russell, 1910/1989 : 241).

[4] Nous utilisons le terme *proposition* dans son sens logique : une proposition est un énoncé susceptible de recevoir une valeur de vérité.

Extension de la négation aux propriétés et importance du domaine d'interprétation

Dans le calcul des prédicats, la négation est un opérateur qui s'applique soit à des phrases closes, soit à des phrases ouvertes mettant en jeu des propriétés ou des relations. Comme ces dernières n'ont pas de valeur de vérité, il faut considérer une *extension* du concept de négation. Nous avons montré dans nos travaux la pertinence du point de vue sémantique introduit par Tarski pour les études en didactique des mathématiques (Durand-Guerrier, 2005). Nous présentons ci-dessous brièvement les apports de sa définition sémantique de la vérité et leur pertinence pour les questions relatives à la négation des énoncés quantifiés dans la classe de mathématiques.

Les apports de Tarski

Pour donner une *définition sémantique de la vérité,* Tarski (1933) introduit la notion de *satisfaction d'une phrase ouverte par un élément du domaine d'interprétation.* Ceci permet de considérer *l'extension de la négation* pour les propriétés : dans un domaine d'objets donné, une propriété et sa négation échangent les éléments qui les satisfont en respectant des critères syntaxiques. Cette définition permet de mettre en relation la négation d'une propriété avec la négation des propositions singulières obtenues en affectant une valeur à la variable et met en évidence le fait que le domaine d'interprétation va jouer un rôle important pour définir ce qu'est la négation d'une propriété. Elle permet également de définir de manière récursive la négation des énoncés quantifiés, qui se construit en changeant le quantificateur et en faisant porter la négation sur le prédicat, comme dans les deux exemples ci-dessous :

(6) : Tout nombre impair est premier / Il existe un nombre impair qui n'est pas premier

(7) : Il existe un entier tel que $x^2 + 1 = 0$ / Quel que soit l'entier naturel x, $x^2 + 1 \neq 0$

Ceci s'inscrit plus largement dans un point de vue modèle-théorique que nous ne développons pas ici[5]. Comme le souligne H. Sinaceur :

[5] Pour l'usage que nous en faisons dans nos recherches, voir Durand-Guerrier (2005).

> Le travail modèle-théorique doit tirer parti de l'examen de la forme et des contenus simultanément. Il se fait dans le va-et-vient entre ces deux pôles. La métamathématique de Tarski œuvre au point de jonction entre propriétés syntaxiques des ensembles d'énoncés et propriétés mathématiques des structures qui les satisfont (Sinaceur, 1996 : 121).

Comme nous l'avons déjà dit, l'étude de la négation nécessite précisément une prise en compte simultanée de la syntaxe et de la sémantique, de la forme et du contenu de l'énoncé. Ceci permet de prévoir l'importance du domaine d'interprétation des énoncés considérés, comme on peut le voir ci-dessous.

Importance de la prise en compte du domaine d'interprétation

En mathématiques, la relation « *être pair* » pour un nombre entier naturel est satisfaite exactement par les multiples de 2. Ainsi *3 est un entier pair* est un énoncé faux ; par suite *3* ***n'****est* ***pas*** *un entier pair* est un énoncé vrai. La négation de la relation « *être pair* » appliquée aux entiers naturels est la relation « *être impair* ». La mention du domaine d'objets considéré est essentielle. En effet, si on s'intéresse maintenant aux fonctions numériques, on peut définir la notion de *fonction paire* (deux éléments opposés ont la même image) et la notion de *fonction impaire* (deux éléments opposés ont des images opposées) ; dans ce cas la négation de la propriété « *être paire* » n'est pas la propriété « *être impaire* » ; en effet, une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. Du point de vue de la syntaxe, la définition de la propriété « être paire » (respectivement « être impaire ») pour une fonction est un énoncé universel : étant donné une fonction numérique f définie sur un domaine E

> f *est paire si et seulement si* "*Pour tout* x *élement de* E $f(-x) = f(x)$" (1).

Sa négation est un énoncé existentiel :

> f *n'est pas paire si et seulement si* "*Il existe* x *élément de* E $f(-x) \neq f(x)$" (2) ;

tandis que la définition de la propriété « être impaire » pour une fonction est un énoncé universel :

$f\ est\ impaire\ si\ et\ seulement\ si\ "Pour\ tout\ x\ \text{élément}\ de\ E\ f(-x) = -f(x)"$ (3).

Ceci illustre l'importance de la prise en compte du domaine d'interprétation pour considérer la négation des propriétés. L'expérience montre que pour de nombreux élèves, les propriétés « *être paire* » et « *être impaire* » pour une fonction numérique sont la négation l'une de l'autre, ceci valant encore à l'entrée à l'université. Notons que ceci relève de la dimension pragmatique au sens défini plus haut.

Négation et contraire dans la classe de mathématiques

Il n'est pas habituel de considérer la notion de *contraire* dans la classe de mathématiques, sauf dans les cours de probabilités où l'on définit la notion d'*événement contraire*, qui est en fait associé à la négation, comme dans l'exemple suivant : étant donné un jeu de cartes, l'événement A est « *tirer un roi* » ; l'événement contraire de A est « *ne pas tirer un roi* ».

On trouve également parfois le terme de *contraire* utilisé comme synonyme de *négation*, comme dans l'exemple suivant tiré d'un manuel de seconde[6] (Barra, 2000 : 91) :

> Pourquoi le contraire de « *f* croissante » n'est pas « *f* décroissante »
>
> Parce que si c'était le cas, une fonction non croissante serait décroissante. Or certaines fonctions ne sont ni croissantes, ni décroissantes.

Nous sommes ici dans le cas de la négation d'une propriété d'objet. Dans une acception assez large que l'on peut rencontrer dans la langue naturelle, on pourrait considérer que le couple « croissant / décroissant » soit un couple de *contraires*. Le fait de considérer *négation* et *contraire* comme des synonymes est donc particulièrement problématique du point de vue de l'appropriation des concepts mathématiques en jeu. Cette distinction est d'autant plus importante que d'autres couples d'opposés en mathématiques fonctionnent comme des *négations* : c'est le cas, on l'a vu, du couple « pair / impair » pour les entiers naturels, ainsi que des couples « rationnel / irrationnel » pour les nombres réels, ou « continu / discontinu » pour les fonctions

[6] Le texte est encadré dans l'ouvrage.

numériques, mais il n'y a pas de construction systématique pour de tels couples d'opposés en mathématiques permettant d'identifier sur la forme seule s'il s'agit de couples correspondant à la *négation* ou au *contraire*. La connaissance des définitions mathématiques des objets en jeu est nécessaire.

En outre, comme on l'a vu dans les paragraphes précédents, la nécessité de faire une claire distinction entre *négation* et *contraire* est particulièrement importante dans le cas des énoncés quantifiés, comme l'avait bien vu Aristote. La pratique largement répandue dans la classe de mathématique de ne pas expliciter les quantifications renforce les difficultés inhérentes à la négation des énoncés quantifiés (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 : 311-312).

La négation en français des énoncés universellement quantifiés

Aux difficultés que nous avons déjà identifiées, s'ajoutent des difficultés liées à la combinaison de la négation et de la quantification. En français, la négation des énoncés universels n'est pas congruente à la structure logique du point de vue de l'ordre des constituants, comme le souligne Maingueneau (1994 : 191) et ne respecte pas le principe de substitution *salvae veritate* qui consiste à préserver la vérité d'un énoncé complexe en substituant à un prédicat donné un prédicat ayant la même extension (c'est-à-dire qui satisfait exactement par les mêmes éléments, Vernant, 1986 : 53).

Une ambiguïté sémantique du français

Fuchs (1996) retient parmi les ambiguïtés sémantiques du français les phrases de la forme « Tous les A ne sont pas B », qui selon la norme linguistique devrait s'interpréter par « Il est faux que tous les A sont B », ce qui correspond à la négation de « Tous les A sont B » et correspond en grammaire à la *négation totale*.

Cependant, comme elle le souligne, un énoncé de cette forme est souvent employé pour signifier « Aucun A n'est un B » (le contraire au sens d'Aristote).

Cette interprétation peut être observée dans des situations de la vie courante comme dans les deux exemples authentiques suivants :

> (8) Dans ce rayon, tous les articles ne sont pas soldés (vu dans un grand magasin en période de soldes dans un rayon où *aucun* article n'était soldé).

(9) Lors de la dernière épidémie de grippe, toutes les victimes n'avaient pas été vaccinées (entendu à la radio lors de l'épidémie de grippe H1N1 pour inciter les auditeurs à se faire vacciner).

Nous l'observons également régulièrement en formation initiale et continue des enseignants, lorsque nous demandons comment interpréter la phrase « toutes les boules ne sont pas rouges », les deux interprétations apparaissant régulièrement et donnant lieu à de vifs débats entre les participants. Dans ce cas, la norme linguistique française n'est pas congruente à la syntaxe logique : une formalisation logique respectant l'ordre des constituants de la phrase « Tous les A ne sont pas B » conduirait à un énoncé universel, alors que la négation est un énoncé existentiel.

Un conflit de signification

Comme nous l'avons vu plus haut, pour les entiers naturels la négation de la proposition « *être pair* » est la propriété « *être impair* ». Si nous considérons la négation de la phrase « Tous les diviseurs de 12 sont pairs » (a), en respectant la norme linguistique on obtient la phrase « Tous les diviseurs de 12 ne sont pas pairs » (b). En substituant « sont impairs » à « ne sont pas pairs », on obtient la phrase « Tous les diviseurs de 12 sont impairs » (c).

La phrase (a) est fausse (3 est un diviseur de 12 et 3 n'est pas pair) ; la phrase (b) qui est sa négation est vraie. Par contre, la phrase (c) est fausse (2 est un diviseur de 12 et 2 est pair).

Ainsi la substitution de « impair » à « n'est pas pair » ne préserve pas la vérité[7]. On peut faire l'hypothèse que ceci tend à renforcer l'interprétation « Aucun A n'est B » pour les phrases de la forme « Tous les A ne sont pas B ». On peut noter que ceci n'est pas spécifique aux mathématiques. Un énoncé tel que « Tous les élèves ne sont pas présents » donne par substitution de « absents » à « ne sont pas présents » l'énoncé « Tous les élèves sont absents ». Le contexte d'énonciation permet en général de trancher entre les deux interprétations, mais des malentendus peuvent survenir lorsque le destinataire ne connaît pas le contexte, comme dans l'exemple (4), où l'on pourrait penser que

[7] On s'attend ici à ce que le principe s'applique, car nous sommes dans un contexte extensionnel simple.

certains articles sont soldés, et d'autres non (interprétation de l'énoncé selon la norme linguistique).

Conséquences sur la négation des énoncés existentiels

Comme on l'a vu, la négation d'une phrase existentielle est une phrase universelle. Pour une phrase de la forme « Certains A sont B », l'application de la règle « Pour nier un énoncé, appliquer l'expression *ne… pas* au prédicat[8] » conduit à l'énoncé existentiel « Certains A ne sont pas B » qui n'est pas la négation de l'énoncé initial, puisque dans certains cas les deux énoncés peuvent être simultanément vrais, comme l'a souligné Aristote.

Par ailleurs, l'application de la règle du calcul des prédicats qui consiste à appliquer la négation sur le prédicat et à changer le quantificateur existentiel en quantificateur universel conduit en français à la phrase ambiguë « Tous les A ne sont pas B » qui selon la norme linguistique n'est pas une phrase universelle, et n'est donc pas la négation de l'énoncé initial. Une manière classique d'exprimer la négation de tels énoncés est d'utiliser le quantificateur « aucun » pour produire l'énoncé « Aucun A n'est B », qui est bien la négation de l'énoncé proposé. Rappelons que dans le calcul classique des prédicats, il y a exactement deux quantificateurs correspondant à « Pour tout » et « Il existe au moins un », qui suffisent pour exprimer la négation dans le système formel. La nécessité de recourir en français au quantificateur « aucun » est lié à l'interprétation des énoncés en « Tous ne pas » suivant la norme linguistique. Une autre possibilité lorsque l'on dispose d'un couple d'opposés correspondant à la négation est de faire la substitution dans l'énoncé « Tous les A ne sont pas B » comme dans l'exemple ci-dessous :

(10) Certain nombres entiers sont pairs / Tous les nombres entiers sont impairs.

On peut faire l'hypothèse que la complexité de la négation des énoncés quantifiés que nous avons mise en évidence aura des effets sur la capacité des élèves et des étudiants à formuler de manière adéquate la négation d'énoncés mathématiques. Nous donnons dans ce qui suit quelques résultats empiriques montrant que ces difficultés

[8] Cette règle s'applique seulement aux énoncés singuliers, par exemple : 3 est un nombre pair / 2 n'est pas un nombre pair.

sont bien réelles et qu'elles sont renforcées en situation de bilinguisme.

Des difficultés avérées dans la classe de mathématiques

Dans cette partie, nous donnons tout d'abord quelques résultats empiriques recueillis en France à la rentrée 2005 auprès d'étudiants scientifiques arrivant à l'université. Nous présentons ensuite brièvement quelques résultats de l'étude de Ben Kilani (2005) en contexte tunisien, ainsi que les tous premiers éléments d'une étude en cours au Cameroun.

Négation d'énoncés quantifiés à l'entrée à l'université en France

A la rentrée 2005, la commission Inter IREM Université[9] a conduit une enquête dans plusieurs académies en France sous la forme d'un questionnaire portant sur les notions de valeur absolue, de limites et de logique. Le questionnaire était adressé avant le début des cours à des étudiants scientifiques arrivant dans l'enseignement supérieur (Facultés des sciences, filières Mathématiques, Informatique, Physique[10], ou Classes préparatoires scientifiques aux grandes écoles). Nous avons dépouillé et analysé 340 réponses. Nous présentons les principaux résultats de l'enquête concernant la négation[11].

La question relative à la négation comportait trois items :

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes : 1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. 2. Certains nombres entiers sont pairs. 3. Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Tableau 1 : la question sur la négation

[9] Les IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont présents dans la plupart des académies – des commissions nationales thématiques ont des rencontres régulières (trois à quatre fois par an) : http://www.univ-irem.fr/

[10] Dans la plupart des cas, ces étudiants sont rassemblés dans un portail commun au premier semestre.

[11] Une présentation plus détaillée se trouve dans Durand-Guerrier (2013).

Phrase n° 1 : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges

En prenant en compte l'analyse logique présentée ci-dessus et les usages dans la classe de mathématiques, nous avons catégorisé *a priori* les réponses possibles des étudiants.

U1- Formulations explicitant la quantification existentielle Il y a (au moins) une boule dans l'urne qui n'est pas rouge – formulation utilisée fréquemment par les enseignants. Certaine boule n'est pas rouge / Certaines boules ne sont pas rouges – formulation utilisée dans le langage courant. U2 – Formulation respectant la norme linguistique Toutes les boules contenues dans l'urne ne sont pas rouges. U3 - Formulations renvoyant à la notion de contraire au sens d'Aristote Aucune boule n'est rouge / Il n'y a pas de boule rouge.

Tableau 2 : catégories a priori pour la question 1

A l'issue du dépouillement, nous avons ajouté une catégorie correspondant à des réponses inattendues synonymes de la phrase affirmative, dans laquelle 13 % des réponses ont été classées.

38 % des réponses ont été classées dans la catégorie U1 qui correspond à une réponse correcte ; seuls 6 % des étudiants ont donné une réponse respectant la norme linguistique, sans que l'on puisse savoir comment cette phrase était interprétée par leurs auteurs.

21 % des réponses ont été classées dans la catégorie U3 correspondant à la confusion entre négation et contraire.

12 % des étudiants n'ont pas donné de réponses ; 10% de réponses ne rentrant dans aucune des catégories ont été classées autres.

Phrase n° 2 : Certains nombres entiers sont pairs

Comme pour la phrase n° 1, nous avons catégorisé *a priori* les réponses des étudiants.

E1 Formulation utilisant le quantificateur « aucun » Aucun nombre entier n'est pair E2 Formulation universelle et substitution de « être impair » à « ne pas être pair » Tous les nombres entiers sont impairs E3 Formulation correspondant à l'application en acte de la règle du calcul

des prédicats Tous les nombres entiers ne sont pas pairs
E4 Formulation correspondant à un énoncé existentiel Certains nombres entiers ne sont pas pairs / Certains nombres entiers sont impairs
E5 Formulation universelle affirmative Tous les entiers sont pairs

Tableau 3 : catégories *a priori* pour la question 2

La réponse de la catégorie E5 avait été anticipée dans l'analyse *a priori*. En effet, ce dernier énoncé, bien qu'il ne respecte pas le critère syntaxique, respecte le critère sémantique (il est faux, tandis que le premier énoncé est vrai). En outre, cette dernière formulation peut s'interpréter comme l'application du *principe du maximum d'information*[12] : « si l'on dit que *certains* nombres entiers sont pairs, c'est que ce n'est pas le cas de *tous* », qui relève de la dimension pragmatique[13].

Les deux premières catégories de réponses qui correspondent à une réponse correcte recueillent respectivement 13 % et 15,5 % des réponses. La catégorie E3 qui correspond à la phrase ambiguë recueille 5,5 % de réponses, de même que la catégorie E5. Il y a 34 % de réponses dans la catégorie E4 qui correspond à une phrase existentielle, qui n'est donc pas la négation ; cette phrase ne respecte ni le critère syntaxique, ni le critère sémantique (elle est vraie, comme la phrase initiale). 15 % des étudiants n'ont pas donné de réponse ; 11,5 % des réponses ne rentrant dans aucune des catégories ont été classées autres.

Phrase n° 3 : Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

Nous ne détaillons pas ici l'analyse *a priori* de la troisième phrase qui met en jeu un énoncé conditionnel avec une quantification universelle implicite, ce qui augmente significativement la complexité de la formulation de la négation. Pour cette dernière questions, 29 % des étudiants ne donnent pas de réponses ; seuls 10 % des étudiants donnent

[12] En référence aux maximes conversationnelles de Grice (1979).

[13] Alors qu'en logique classique, les deux énoncés « Certains A sont B » et « Tous les A sont B » peuvent être tous les deux vrais (lorsque le second est vrai).

une réponse correspondant à la réponse correcte, à savoir « *Il existe un nombre entier divisible par 4 et ne se terminant par 4* ». Deux tiers des étudiants qui donnent une réponse (soit 45,5 % de la population totale) donnent une réponse sous la forme d'un énoncé conditionnel, ne respectant ni le critère syntaxique, ni le critère sémantique. Ces résultats, qui sont cohérents avec ce que l'on peut observer à l'université, illustrent un phénomène didactique, souligné par Vergnaud (2002), à savoir que le développement dans l'usage d'invariants opératoires ne suffit pas à développer les connaissances prédicatives associées. En effet, au lycée, les étudiants français utilisent régulièrement *la règle du contre-exemple*[14] pour prouver qu'un énoncé universel est faux. En début d'université, cette règle peut être mobilisée par les étudiants, et l'avancée dans les études en consolide l'usage. Cependant, un certain nombre d'étudiants de 3e année ou de 4e année suivant des études en mathématiques à l'université sont incapables de produire la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié. Autrement dit, ils ne font pas le lien entre la négation d'une implication universellement quantifiée (connaissance prédicative) et l'affirmation de l'existence d'un contre-exemple à cette implication pour établir qu'elle est fausse (connaissance opératoire).

On pourrait faire l'hypothèse que ce qui compte est la mise en œuvre de la règle opératoire du contre-exemple. Cependant, dès les premières années d'université, il n'est pas rare d'avoir à considérer une telle négation, par exemple dans le cas d'un raisonnement par l'absurde.

Des difficultés renforcées par le plurilinguisme

Dans cette section, nous présentons brièvement quelques éléments issus du travail de thèse de Ben Kilani (2005) dans le contexte de l'enseignement secondaire tunisien que nous complétons par quelques résultats issus d'un travail en cours à la transition secondaire / supérieur au Cameroun.

---

[14] Un contre-exemple pour un énoncé conditionnel universel est un élément qui satisfait l'antécédent, mais pas le conséquent.

De 1999 à 2005, I. Ben Kilani a conduit des recherches sur les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique (Ben Kilani 2005). Cette étude était motivée par le fait que, depuis quelques années, en Tunisie, l'enseignement des mathématiques se fait en arabe jusqu'à la fin de l'école de base (14 ans) puis en français, sans qu'il y ait une prise en charge explicite des effets potentiels de ce changement de langue pour les apprentissages mathématiques. Nous avions fait l'hypothèse que ceci pouvait être une source de difficultés pour les élèves compte tenu des spécificités de la négation en français des énoncés quantifiés. Les résultats obtenus à l'issue de ses travaux confirment cette hypothèse (Ben Kilani, 2005). Nous présentons ci-dessous les principaux résultats de cette étude.

Ses recherches sur la grammaire arabe mettent en évidence le fait que, contrairement à ce qui se passe pour le français, la construction de la négation en arabe littéral suit celle de la logique classique, et donc des mathématiques enseignées dans le secondaire. Lorsque la particule de négation est placée en tête de phrase, elle porte sur la phrase toute entière (négation totale) ; lorsqu'elle est placée à l'intérieur de la phrase, elle porte sur le fragment de phrase correspondant (négation partielle). De ce fait, la traduction mot à mot du français à l'arabe d'une phrase de la forme « Tous les A ne sont pas B » conduit à une phrase en arabe signifiant « Tout A est non B », qui est synonyme de « Aucun A n'est B ».

Ben Kilani a conduit des interviews auprès de trois enseignants volontaires de français ayant à enseigner la négation en huitième année de l'enseignement de base en Tunisie. Les réponses de ces trois enseignants aux deux phrases proposées (*Tous les élèves de la classe sont présents / Aucun document n'est autorisé à l'examen*) montrent que ceux-ci identifient *la négation* de ce type d'énoncé *au contraire* au sens d'Aristote (point de vue logique) ou à la négation partielle (point de vue grammatical). Ceci est cohérent avec les objectifs de l'enseignement dispensé dans le cours de français, à savoir travailler sur les différentes formes négatives et la variété des adverbes de négation, autres que *ne … pas*, sans se préoccuper des aspects sémantiques. Ainsi la forme négative associée à l'énoncé « Tous les élèves sont présents » sera « Aucun élève n'est présent », ce qui vient s'ajouter aux phénomènes précédents.

Les mêmes questions ont été proposées à soixante-douze élèves de la sixième année secondaire en Tunisie (cette classe correspond à la première scientifique en France). Pour la première phrase (*tous les élèves sont présents*), deux élèves sur trois ont répondu en donnant un énoncé universel (le contraire au sens d'Aristote) : *Aucun élève de la classe n'est présent* / *Tous les élèves sont absents* ; près d'un élève sur cinq a proposé la formulation ambigüe : *Tous les élèves de la classe ne sont pas présents*. Seuls 14 % d'entre eux ont donné une réponse utilisant l'un des quantificateurs : *certain* ou *il existe*. Pour la seconde phrase, 85 % des élèves ont proposé comme négation la phrase : *Tous les documents sont autorisés à l'examen* ; seuls 11 % donnant une réponse correcte.

Le questionnaire comportait également deux énoncés mathématiques. Les taux de réponses correspondant au contraire au sens d'Aristote sont plus faibles, mais restent néanmoins encore significatifs (respectivement 40 % et 54 % de réponses de ce type). Les analyses de manuels mathématiques montrent que la négation ne fait pas l'objet d'un travail explicite à ce niveau, bien que les élèves puissent être amenés à nier des énoncés quantifiés dans le cadre de raisonnement par l'absurde (Ben Kilani, 2005).

Les résultats du travail de recherche conduit par Ben Kilani (2005) mettent en évidence le fait que les difficultés liées à la combinaison de la négation et de la quantification déjà identifiées dans le contexte français sont renforcées par le changement de langue entre l'école de base où l'enseignement des mathématiques se fait en arabe et l'enseignement secondaire où cet enseignement se fait en français :

> Il apparaît en outre que sur un exercice de mathématique, portant sur la caractérisation du losange parmi les quadrilatères, proposé en entretien en arabe à quatre binômes d'élèves de la neuvième année de l'école de base et en français à quatre binômes d'élèves de la première année secondaire, ces derniers sont moins performants que leurs camarades théoriquement moins avancés sur le plan mathématique. (Durand-Guerrier *et al.*, 2006 : 81)

Compte tenu du rôle joué par la négation dans le processus de conceptualisation en mathématiques, et dans un certain nombre de preuves mathématiques, on peut faire l'hypothèse que ceci est une source potentielle d'échec, et ce d'autant plus que ces difficultés ne sont le plus souvent pas identifiées par les enseignants, et par suite ne sont pas travaillées dans la classe. Dans ses travaux de recherche, Ben Kilani n'a pas pris en compte les effets qui pourraient être produits par les spécificités de l'arabe dialectal, qui est la langue de communication en dehors de l'école. Sa prise en compte aurait complexifié la recherche au-delà de ce que les outils méthodologiques disponibles permettaient de faire. L'étude de l'impact de la langue de communication sur le discours mathématiques en classe dans un contexte francophone fait l'objet d'une étude en cours de J. Njomgang Ngansop au Cameroun, au niveau de la transition secondaire/supérieur.

Interférences entre ewondo et français au Cameroun

Au Cameroun, il y a deux langues officielles, l'anglais et le français, et deux systèmes d'enseignement distincts, l'un anglophone, l'autre francophone, et ce dès l'école primaire ; par ailleurs, il existe environ 230 ethnies avec chacune sa propre langue. Les travaux de J. Njomgang-Ngansop concernent le système francophone et la langue ewondo. Le choix de l'ewondo est motivé d'une part par sa fréquence d'usage dans la région de Yaoundé, d'autre part par la disponibilité du travail de Françoise Tsoungui (1980) qui a étudié les interférences entre le français et l'ewondo, et a mis en évidence qu'il y a des différences concernant le singulier et le pluriel, le défini et l'indéfini susceptibles d'interférer avec la quantification. Concernant la négation, Tsoungui note que sa construction en ewondo est complexe : elle utilise comme en français un morphème discontinu « *á* … *kig* », pour les phrases simples ; *kig* peut être placé après le verbe ou à la fin de la phrase. Il s'agit principalement d'une particule de renforcement, la négation pouvant en effet être exprimée à l'aide du seul morphème *á*. Il existe également d'autres marqueurs de négation dont l'utilisation dépend du contexte dans lequel on se trouve ; il y a en outre une variation tonale[15].

Conclusion

La négation logique à l'œuvre dans la classe de mathématiques est une notion complexe, *de nature sémantique* (elle échange le vrai et le faux) qui obéit à *des règles syntaxiques* précises selon la langue dans laquelle elle s'exprime. En français, la question de la portée respective du quantificateur et de l'opérateur de négation peut être source d'ambiguïté ; dans ce cas, c'est en général le contexte qui permet de trancher (*aspect pragmatique*).

Comme nous l'avons montré, cette complexité logique a un impact sur la capacité des étudiants à formuler la négation d'un énoncé quantifié de manière conforme aux usages mathématiques. Or cette complexité est le plus souvent sous-estimée par les professeurs, et de ce fait peu travaillée en classe de mathématiques, même si depuis 2009 les notions de logique ont fait un retour explicite dans les programmes de mathématiques de lycée en France.

Les analyses et les résultats empiriques que nous avons présentés plaident selon nous pour des études croisées entre didactique des langues et didactique des mathématiques pour ce qui concerne les usages de la négation en contexte scolaire, avec une attention particulière portée aux situations de plurilinguisme. Plus généralement, il nous semble nécessaire de poursuivre l'exploration des apports des travaux en linguistique et en didactique des langues pour l'étude des questions langagières en mathématiques, ceci ne valant pas seulement pour la négation, même si ce connecteur est emblématique des questions difficiles soulevées par l'usage des connecteurs dans l'activité mathématique (Edmonds-Wathen *et al.* 2015).

---

[15] L'étude de l'impact de la langue de communication sur le discours mathématiques en classe dans un contexte francophone fait l'objet d'une étude en cours de J. Njomgang Ngansop au Cameroun, au niveau de la transition secondaire/supérieur (Njomgang Ngansop et Durand-Guerrier 2011).

Références bibliographiques

Aristote, *Organon, I. Catégories – II. De l'interprétation*. Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, 1989, Librairie philosophique J. Vrin.

Barra, R., 2000, *Transmath. Programme 2000. Seconde*, Paris : Nathan.

Ben Kilani, I., 2005, *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*, Thèse en co-tutelle des Universités Lyon 1 et Tunis.

Da Costa, N.C.A., 1997, *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*, Paris : Masson.

Durand-Guerrier, V., 2005, *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*, note de synthèse pour l'Habilitation à diriger les Recherches, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier, V., 2013, « Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques », *in* A. Bronner *et al.* (coord.) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions

Durand-Guerrier, V., Arsac, G., 2003, « Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? », *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23/3, 295-342.

Durand-Guerrier, V. Ben Kilani I., 2004, « Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien », *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, 29-55.

Durand-Guerrier, V., Dias, T., Ben Kilani I., 2006, « Plurilinguisme et apprentissage des mathématiques. Ambiguïtés référentielles ; négation et quantification », *Les Langues Modernes,* 3, 75-83.

Eco, U., 1988, *Le signe*. Bruxelles : Editions Labor.

Edmonds-Wathen, C Trinick, T. and Durand-Guerrier, V. "Impact of Differing Grammatical Structures in Mathematics Teaching and Learning", *in* R.Barwell *et al.* (eds), *Mathematics Education and Language Diversity*, New ICMI Study Series, Springer, 23-46.

Frege, G., 1971, *Écrits logiques et philosophiques*, traduction et introduction de C. Imbert. Paris : Seuil.

Fuchs, C., 1996, *Les ambiguïtés du français*, Paris : Ophrys.

Gardies, J. L., 2004, *Du mode d'existence des objets de la mathématique*, Paris : Vrin.

Grice, H.P., 1979, « Logique et conversation », *Communication*, 30, 57-72.

Mainguenau, D., 1994, *Précis de grammaire pour les concours*, Paris : Dunod.

Morris, C.W. (1938), *Foundations of the theory of signs*, Chicago: Chicago University Press

Njomgang-Ngansop J., Durand-Guerrier V., 2011, "Negation of mathematical statements in French in multilingual contexts - an example in Cameroon", *Proceedings of the ICMI Study 21 - Mathematics and Language Diversity, Sao Paulo, Brazil,* 268-275.

Peano, G., 1894, *Notations de Logique Mathématique* (Introduction au Formulaire de Mathématiques), Guadagnini, Turin.

Russell, B., 1989, *Ecrits de logique philosophique*, traduction J.M. Roy, Paris : PUF.

Russell, B., 1910/1989, *Ecrits de logique philosophique*, traduction J.M. Roy, Paris : PUF.

Sinaceur, H., 1996, *Mathématiques et métamathématique du congrès de Paris (1900) au congrès de Nice (1970) : nombres réels et théorie des modèles dans les travaux de Tarski*, in *Studies in the history of modern mathematics, II. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* Serie II, n° 44, 113-132.

Tarski, A., 1933/1972, *Logique, sémantique, métamathématique*, 1923 – 1944, traduction française sous la direction de G.G. Granger, Paris : Armand Colin.

Tsoungui, F., 1980, *Le français écrit en classe de 6e à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3e cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle.

Vergnaud, G., 2002, Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *in* J. Portugais (éd.), *Actes du colloque GDM 2001*, *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation,* Université de Montréal, 6-27.

Vernant, D., 1986, *Introduction à la philosophie de la logique*, Bruxelles : Mardaga, « Philosophie et langage ».