



HAL
open science

Animation dynamique de corps déformables continus

Olivier Nocent

► **To cite this version:**

Olivier Nocent. Animation dynamique de corps déformables continus : Application à la simulation de textiles tricotés. Informatique [cs]. Université de Reims Champagne Ardenne (URCA), 2001. Français. NNT : 2001REIMS026 . tel-04426043

HAL Id: tel-04426043

<https://hal.univ-reims.fr/tel-04426043>

Submitted on 30 Jan 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

THESE DE DOCTORAT

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université de Reims Champagne-Ardenne

présentée par
Olivier Nocent

Le 20 décembre 2001

Animation dynamique de corps déformables continus

Application à la simulation de
textiles tricotés

Composition du jury

Claude	SECROUN	Président	Professeur, URCA
Bruno	ARNALDI	Rapporteur	Professeur INSA, Université de Rennes
Christophe	CHAILLOU	Rapporteur	Professeur EUDIL en détachement INRIA, Lille
Jean-Marie	BACHMANN	Examineur	Ingénieur, IFTH
Yannick	REMION	Directeur	Professeur, URCA

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse :

BRUNO ARNALDI pour sa fidélité indéfectible aux travaux de recherche de l'équipe d'animation dynamique du LERI, illustrée par sa présence aux soutenances de thèse de DIDIER GILLARD, de JEAN-MICHEL NOURRIT et la mienne, ainsi qu'à la soutenance d'habilitation à diriger des recherches de YANNICK REMION.

CHRISTOPHE CHAILLOU pour son intérêt enthousiaste à l'égard des mêmes travaux, ayant donné lieu à de nombreuses rencontres avec les membres de l'équipe GRAPHIX du LIFL. Le fruit de ces discussions a permis entre autres d'intégrer notre solution au simulateur d'actes chirurgicaux SPORE développé au LIFL.

JEAN-MARIE BACHMANN pour son expertise éclairée en matière de confection de textiles tricotés, grâce à laquelle il aura su sensibiliser les profanes que nous sommes à la complexité structurelle et la diversité des tricots techniques.

CLAUDE SECROUN pour sa bienveillance et sa confiance de tous les instants. Je lui suis infiniment reconnaissant de m'avoir ouvert les portes de ce domaine merveilleux qu'est l'informatique graphique en facilitant mon inscription en DUIIC (Diplôme d'Université en Image Infographie Communication) alors que je ne disposais d'aucun bagage informatique.

YANNICK REMION pour son exigence et sa rigueur scientifique. Je tiens particulièrement à manifester mon admiration et mon respect pour YANNICK REMION qui, de par sa patience et son sens didactique, m'a aidé progresser et à tirer le meilleur de moi-même durant ses trois années de thèse.

Je profite de cette occasion pour saluer mes collègues du LERI qui entretiennent au quotidien cette ambiance conviviale, propice aux échanges d'idées et à l'épanouissement personnel : « double respects » à 2R. Je remercie surtout JEROME CUTRONA, un de mes anciens étudiants devenu un collègue mais surtout un grand ami, pour sa disponibilité sans faille et son épaule solide lorsque j'étais au creux de la vague (et Dieu sait que j'en ai traversé des tempêtes !).

Une pensée à l'égard de mes proches qui ont suivi de près ou de loin cette longue aventure : ma mère FRANÇOISE, mes sœurs NATHALIE et ISABELLE, NAT&MANU, HALIMA&JEROME, GRONIKO, mat@stones.com, RICO DEL LULU, MURLOCK, BILBO, les petits noirs serrés de SEGAFREDO® (compagnons privilégiés de mes nuits blanches), les rythmes atmosphériques de THIEVERY CORPORATION.

Enfin toute ma reconnaissance s'adresse à ma compagne DOMINIQUE, dont l'amour et la patience infinie auront été mis à rude épreuve pendant ces derniers mois : « *gosto de ti, meu coração* »

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS	5
-----------	---

■ INTRODUCTION GENERALE

1 Préambule	9
2 Contexte	9
2.1 Contexte scientifique	9
2.2 Contexte applicatif	10
3 Objectifs	11

■ CAISSE A OUTILS THEORIQUES POUR L'ANIMATION DYNAMIQUE

CHAPITRE ①

EQUATIONS DE LAGRANGE : DE LEUR JUSTIFICATION A LEUR MISE EN ŒUVRE INFORMATIQUE	17
---	----

1 Introduction	17
2 Préambule historique	18
3 Définitions	20
3.1 Configuration géométrique	20
3.2 Contraintes supplémentaires	22
3.3 Cinématique	24
3.4 Dynamique	25
4 Approche intégrale	27
4.1 Lagrangien	27
4.2 Principe de moindre action	28
4.3 Equations de Lagrange	30
4.4 Expression du lagrangien	32
5 Approche différentielle	33
5.1 Mouvements virtuels	33
5.2 Vitesse et puissance virtuelles	34
5.3 Principe des puissances virtuelles	36
5.4 Principe de d'Alembert	36
5.5 Equations de Lagrange	37
5.6 Prise en compte des contraintes	38
5.6.1 Contraintes holonomes	38
5.6.2 Contraintes cinématiques	40
5.6.3 Contraintes unilatérales	41
5.6.4 Multiplicateurs de Lagrange	43
6 Petit guide à l'attention de l'informaticien	44
6.1 Quelques bonnes raisons pour privilégier le formalisme lagrangien	44
6.1.1 Généricité	44
6.1.2 Prise en compte naturelle des liaisons	45
6.2 Mise en œuvre informatique	45
6.3 Formulation équivalente des équations de Lagrange	46

6.3.1 Equations de Lagrange	46
6.3.2 Equations des contraintes	47
6.4 Architecture logicielle	49

CHAPITRE ②

METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE **51**

1 Introduction	51
2 Définitions	52
2.1 Discrétisation du problème	52
2.2 Méthodes d'intégration	52
2.3 Consistance, stabilité et convergence des méthodes d'intégration	53
2.3.1 Consistance	53
2.3.2 Stabilité	54
2.3.3 Convergence	56
2.4 Classification des problèmes d'intégration numérique	56
3 Méthodes d'intégration à un pas	57
3.1 Méthodes explicites	57
3.1.1 Critères de convergence	57
3.1.2 La méthode d'Euler (1768)	58
3.1.3 La méthode de Runge (1895)	59
3.1.4 Construction des méthodes explicites à un pas (1901)	60
3.1.5 Classification des méthodes explicites à un pas	62
3.1.5.1 Méthode d'ordre 1	62
3.1.5.2 Méthodes d'ordre 2	62
3.1.5.3 Méthodes d'ordre 3	63
3.1.5.4 Méthodes d'ordre 4	63
3.1.5.5 Méthodes d'ordre 5	63
3.1.5.6 Méthodes d'ordre 6	64
3.1.6 Récapitulatif sur les méthodes explicites à un pas	64
3.1.7 Contrôle de l'erreur, sélection du pas	65
3.2 Méthodes implicites	66
3.2.1 Résolution par itérations	67
3.2.2 Linéarisation	67
3.2.3 Méthode Prédiction-Evaluation-Correction	69
4 Méthodes d'intégration à pas multiples	69
4.1 Méthodes explicites	70
4.1.1 Méthode d'Adams-Bashforth (1855)	70
4.2 Méthodes implicites	71
4.2.1 Méthode d'Adams-Moulton (1855)	71
4.2.2 La méthode BDF (Backward Differentiation Formulas)	73
5 Synthèse	73

CHAPITRE ③

CORPS DEFORMABLES EN ANIMATION DYNAMIQUE. ETAT DE L'ART

75

1 Introduction	75
2 Modèles classiques	76
2.1 Mécanique du point matériel	76
2.1.1 Modèle masses-ressorts	76
2.1.2 Modèle à base de particules	77
2.1.3 Modèle SPH	78
2.2 Mécanique des milieux continus	79
2.2.1 Modèle de Terzopoulos	80
2.2.2 Méthode des éléments finis	82
2.2.3 Modèle « dynamique modale »	84
2.2.4 Modèle « dynamique globale »	84
2.3 Synthèse	85

■ VARIETES SPLINES DE DIMENSION D

CHAPITRE ①

GEOMETRIE DES VARIETES SPLINES _____ 91

1 Introduction	91
2 Courbe spline	91
2.1 Courbe d'Hermite	94
2.2 Courbe de Catmull-Rom	95
2.3 Courbe de Kochanek (i.e. courbe TCB)	95
2.4 Courbe de Bézier	96
3 Extension aux dimensions supérieures	96
3.1 Surface et volume spline	96
3.2 Multi-indice de dimension d	98
3.3 Variété spline de dimension d	98
3.4 Coordonnées généralisées	100
3.5 Fonction de positionnement	100
4 Codage informatique	101

CHAPITRE ②

CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES VARIETES SPLINES _____ 105

1 Cinématique	105
1.1 Fonction des configurations	105
1.2 Fonction de vitesse	106
2 Dynamique	107
2.1 Répartition massique	107
2.2 Energie cinétique, équations de Lagrange	112
2.3 Efforts	113
2.3.1 Force ponctuelle générique	114
2.3.2 Densité d'efforts : amortissement	114
2.3.3 Energie potentielle : gravitation	115
3 Codage informatique	116
4 Exemples de variétés splines	117
4.1 Plongeur	117
4.2 Cube élastique	118
4.3 Balançoire	119

CHAPITRE ③

ENERGIE CONTINUE DE DEFORMATION DES VARIETES SPLINES _ 121

1 Introduction	121
2 Théorie de l'élasticité	122
2.1 Déformations	122
2.1.1 Déformations en description lagrangienne	122
2.1.2 Elasticité linéaire	125
3 Contraintes	126
4 Loi de comportement	127
4.1 Matériaux élastiques	127
4.2 Matériaux élastiques isotropes	128
4.3 Matériaux de St Venant-Kirchhoff	129
4.4 Matériaux hyper élastiques	129
4.5 Loi de Hooke	130

5 Application aux courbes splines matérielles	131
5.1 Aspects informatiques de l'énergie continue de déformation	137
5.2 Loi de ressort équivalente	138
5.3 Energie de déformation vs. ressorts	140
6 Conclusion	142

CHAPITRE ④

REDUCTION DE PARAMETRAGE : APPLICATION AUX TEXTILES

TRICOTES	143
1 Introduction	143
2 Réduction de paramétrage	144
3 Application à l'animation des textiles tricotés	147
3.1 Mise en œuvre	148
3.1.1 Volume paramétrique englobant	148
3.1.2 Plongement du liage	150
3.2 Validation qualitative	151
3.3 Construction du système différentiel « réduit »	153
3.3.1 Matrice des masses généralisées	153
3.3.2 Puissance virtuelle des efforts	154
3.4 Exemple numérique	154
4 Conclusion	156

■ CONCLUSION GENERALE

BIBLIOGRAPHIE	165
----------------------	------------

NOTATIONS

Les quantités scalaires sont désignées à l'aide de lettres italiques telles que le temps t .

Les quantités vectorielles ou matricielles sont désignées par des lettres en caractère gras comme un vecteur \mathbf{v} ou une matrice \mathbf{M} . Afin de distinguer la numérotation de quantités vectorielles ou matricielles avec l'indexation de leurs coordonnées, on choisit d'adopter la convention suivante :

- Les numéros en exposant désignent le numéro du vecteur (resp. matrice) dans un ensemble ordonné. Exemple : $\mathbf{p}^i \quad 1 \leq i \leq n$.
- Les numéros en indice désignent le numéro de la coordonnée du vecteur (resp. matrice). Exemple : $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Pour désigner des sous-éléments d'un vecteur ou d'une matrice, on utilise la notation symbolique suivante :

$\mathbf{M}_{i\circ}$ correspond au vecteur ligne n° i de la matrice \mathbf{M} .

$\mathbf{M}_{\circ i}$ correspond au vecteur colonne n° i de \mathbf{M} .

\mathbf{v}^* correspond au vecteur \mathbf{v} privé de son premier élément.

\mathbf{M}^* , \mathbf{M}^{o*} , \mathbf{M}^{**} correspondent à la matrice \mathbf{M} privée respectivement de sa première ligne, de sa première colonne, ou des 2.

Les quantités tensorielles sont quant à elles désignées par des lettres cursives comme \mathcal{I} , $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$ ou $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$.

Concernant les dérivées partielles par rapport à une quantité scalaire ou même vectorielle, on utilise les notations équivalentes suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}, t) \quad \text{et} \quad = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) = \text{grad}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t)$$

Enfin par souci de concision, on désigne plusieurs espaces matriciels usuels à l'aide des notations suivantes :

$M_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

$M_n^+(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices positives.

$M_n^{>}(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices définies positives.

$S_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

$O_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales.



INTRODUCTION GENERALE

1 Préambule

Depuis plusieurs décennies, les sociétés dites modernes sont sujettes à de profondes mutations sous l'impulsion d'une informatisation massive. En effet, l'informatique a d'ores et déjà investi de nombreux secteurs d'activité demandeurs de toujours plus de performance, d'automatisation et de capacité de communication. Les conséquences de cette conquête triomphante de l'ordinateur sont palpables dans les comportements sociaux qui reflètent globalement une aspiration à une certaine forme d'instantanéité dans la communication et la transmission du savoir. Dans ce nouveau contexte, l'image devient plus que jamais le vecteur principal de l'information. A la fois riche et concise, l'image numérique (qu'elle soit issue de la réalité ou d'une réalité virtuelle) devient un objet d'intérêt central pour un large éventail de professions comme les métiers liés à l'audiovisuel, la médecine, l'industrie, la défense, etc.

En effet, l'aura de l'informatique graphique éclaire de nombreuses disciplines « classiques », leur offrant de nouvelles voies de recherche grâce à l'apport de nouvelles possibilités de manipulation, d'organisation et de visualisation de l'information. De façon quelque peu naïve, l'émergence de l'informatique graphique et l'apparition d'une cohorte de nouveaux outils semblent laisser supposer que l'on puisse à terme, représenter et simuler les moindres aspects de notre environnement, des plus extraordinaires aux plus quotidiens.

Un des défis que l'animation dynamique cherche à relever s'inscrit dans cette logique de simulation des nombreux aspects de l'environnement en choisissant de s'appuyer sur les lois de la physique pour reproduire le mouvement. La tâche est de grande ampleur si l'on considère l'infinité des variétés de mouvements ou d'évolutions des formes qui nous entourent. Qu'il s'agisse d'imiter le rebond d'une balle, l'enroulement de volutes de fumée, la trace d'empreintes de pas dans le sable pour les besoins de films d'animations ou bien de proposer des environnements virtuels pour la simulation d'actes chirurgicaux, la confection de vêtements, la modélisation informatique de matériaux déformables devient un enjeu de taille. Le travail présenté dans ce mémoire se propose de développer la construction d'un modèle physique pour représenter l'évolution de corps déformables continus. L'implantation informatique de ce modèle de corps déformables vient apporter une réponse alternative aux modèles déjà existants en animation dynamique.

Par ailleurs, l'habillement est depuis quelques années déjà un de ces secteurs industriels fortement marqués par l'intégration des techniques informatiques de pointe. En effet, la modélisation informatique de matières textiles offre de nombreux avantages tels que la faculté de concevoir, d'étudier et de visualiser des vêtements virtuels sans avoir recours à leur confection réelle sur un métier à tisser ou à tricoter. Je m'emploie alors à appliquer mon modèle de corps déformables aux textiles tricotés afin d'apporter quelques éléments de réponse aux nombreuses attentes formulées par l'industrie textile.

2 Contexte

2.1 Contexte scientifique

Le contenu de mon travail a tout d'abord été influencé par un contexte scientifique dans la mesure où il s'inscrit dans la politique scientifique à long terme de l'équipe d'animation

dynamique du LERI. Le début de ma thèse coïncida en fait avec une importante restructuration des travaux de l'équipe. Dans le cadre de leurs de thèses respectives, Didier Gillard et Jean-Michel Nourrit avaient été amenés à développer des moteurs d'animation dynamique dédiés respectivement à l'animation de corps rigides articulés et de textiles tricotés. Sous l'impulsion de Yannick Remion, l'équipe entreprit l'élaboration d'une plate-forme d'animation dynamique unifiée et générique afin de rassembler l'ensemble des savoir faire acquis au fil des travaux précédents. Mais cet effort de restructuration fut aussi l'occasion d'approfondir nos connaissances pour asseoir notre maîtrise de compétences annexes mais pourtant nécessaires à l'animation dynamique.

La première et la plus essentielle de ces disciplines étrangères à l'informatique mais indispensable est la mécanique. Pour tout informaticien que nous sommes, la compréhension des équations mathématiques du mouvement est un passage obligatoire pour la conception d'une application d'animation dynamique. Cette compréhension nous donne entre autres la faculté de choisir le formalisme physique le plus approprié pour simuler un phénomène donné. Plus encore, cette lucidité vis-à-vis des équations du mouvement nous permet d'envisager une implantation informatique performante exploitant les nombreuses propriétés structurelles des équations du mouvement retenues.

L'intégration numérique est une discipline issue de l'analyse numérique qui permet de déduire des solutions approchées des équation différentielles que sont les équations du mouvement. Ainsi l'animateur se doit de connaître les résultats principaux dans ce domaine : au moins doit-il avoir en tête une classification des méthodes les plus usuelles en maîtrisant les avantages et les inconvénients de chacune. De cette manière, il est à même, face à un problème imposé, de choisir parmi les méthodes à sa disposition celle qui offrira la solution approchée la plus acceptable.

2.2 Contexte applicatif

Ce travail de recherche¹ est en fait partie intégrante d'une collaboration industrielle avec l'antenne de l'IFTH (Institut Français du Textile et de l'Habillement²) basée à Troyes, spécialiste dans l'étude et la confection de matériaux tricotés. Ce partenariat liant l'IFTH et le LERI (Laboratoire de Recherches et d'Etudes Informatiques) a vu le jour en 1995 sous la forme d'une première thèse réalisée par Jean-Michel Nourrit.

Les attentes de l'industrie textile sont aussi diverses que d'envergure dans la mesure où elle commence à peine à faire appel aux possibilités offertes par l'informatique graphique. Parmi les nombreuses applications de l'informatique à la modélisation de textiles, on réalise aisément les avantages qu'offrirait une plate-forme de « prototypage virtuel ». Cette application permettrait en l'occurrence d'étudier les caractéristiques visuelles et le comportement mécanique sous différentes conditions d'expérimentation d'un échantillon textile sans avoir à le confectionner. Cette démarche permettrait d'une part d'effectuer de nombreux essais en un temps moindre puisqu'il suffirait en fait de modifier quelques paramètres caractéristiques du textile et de

¹ Les travaux figurant dans ce mémoire de thèse de doctorat ont été financés par le conseil régional de Champagne-Ardenne.

² <http://www.ifth.org>.

réitérer la simulation. D'autre part, l'impact sur le coût financier serait loin d'être négligeable dans la mesure où la confection d'échantillons nécessite de monopoliser plusieurs métiers à tisser ou à tricoter qui consistent en des ressources d'importance amputées à l'activité de production.

Mais l'apparition de l'informatique graphique dans la chaîne de production textile a aussi des conséquences à d'autres niveaux. Doté d'un modèle informatique fidèle à la fois à l'aspect et au comportement d'un textile, l'industrie serait à même de produire des catalogues de collections de vêtements virtuels sans avoir à les produire physiquement. Ainsi équipée de ce nouveau moyen de présentation, elle pourrait adapter de façon plus souple et plus performante l'offre à la demande, en ne confectionnant que les articles ayant les faveurs de la clientèle.

A l'extrémité de la chaîne de production, le comportement du client serait lui aussi modifié de façon drastique par l'intégration d'outils issus de l'informatique graphique. Disposant d'un modèle informatique paramétrable de vêtement, le client modifierait son comportement de consommation en achetant des vêtements sur mesure depuis son domicile. La disparition des nombreux intermédiaires dans la chaîne de distribution engendrerait une impression de proximité dans la relation qu'entretiennent producteurs et consommateurs. L'informatique devenant l'unique interface entre ces deux mondes, instaurerait une confiance née d'une personnalisation apparente du service au consommateur qui serait un moteur pour le dynamisme de l'industrie textile.

Enfin, un dernier aspect de l'apport de l'informatique graphique consiste en la proposition de modèles scientifiques de description géométrique et physique des matériaux textiles. Cette contribution de l'informatique graphique vise à combler les lacunes dans la caractérisation des matériaux tricotés surtout. Contrairement aux textiles tissés dont la structure relativement simple est constituée de croisements perpendiculaires de fils, les tricots constituent un véritable défi pour la modélisation géométrique au vu de la diversité des liages que les confectionneurs ont déjà envisagés. Cette différence fondamentale entre textiles tissés et textiles tricotés est une des raisons pour laquelle il n'existe pas à ce jour de critères objectifs pour caractériser les textiles tricotés. La réalisation d'un modèle dynamique de tricots entièrement paramétrable pourrait permettre à partir de simulations de dégager des critères caractéristiques des différents modes du tricot, à l'image des tests de Kawabata qui permettent de caractériser et de classer l'ensemble des textiles tissés.

3 Objectifs

Face à la diversité des contextes qui constituaient mon environnement de travail, j'orientais mes travaux dans plusieurs directions ayant pour trait commun l'enrichissement de nos réalisations en animation dynamique. Ce document reflète d'ailleurs cette diversité de centres d'intérêt par sa structure composée de deux grandes parties distinctes.

La première partie intitulée « Caisse à outils théoriques pour l'animation dynamique » regroupe les différents travaux de nature bibliographique motivés par la volonté de l'équipe de constituer un ensemble de documents de référence traitant de problèmes liés à l'animation dynamique. La première étude bibliographique de cette partie traite d'une justification des équations de Lagrange. Ces équations, pierre angulaire de la mécanique analytique, constituent le formalisme

physique pour lequel nous avons opté au sein de l'équipe d'animation dynamique. Cette étude a pour vocation d'illustrer les nombreux concepts intervenant dans les équations de Lagrange pour en dégager le sens physique et de les organiser pour préparer un terrain favorable à une implantation informatique ultérieure. La deuxième étude bibliographique, rédigée dans le même état d'esprit didactique que la première, traite des problèmes liés à la résolution numérique des équations différentielles telles que les équations d'évolution régissant le mouvement des corps soumis à un ensemble d'efforts. J'expose dans cette étude plusieurs méthodes usuelles répertoriées selon des critères objectifs de comparaison afin d'éclairer le lecteur sur les avantages et les inconvénients des méthodes proposées. Enfin, je termine cette partie consacrée aux études bibliographiques par un état de l'art sur la modélisation des corps déformables en animation dynamique. Ce dernier chapitre plus conventionnel dresse un inventaire des solutions déjà proposées me permettant de situer le modèle innovant que je propose en le comparant aux modèles existants.

Ce travail bibliographique, constituant une partie importante de ce mémoire, découle d'une volonté forte de rassembler, d'approfondir et de figer l'expérience commune du groupe dans la maîtrise de compétences étrangères à l'informatique afin de constituer un ensemble de documents de référence à l'intention des membres de l'animation dynamique et j'ose l'espérer à l'intention de tout informaticien désireux d'entreprendre la mise en œuvre d'une plate-forme d'animation dynamique.

La conception d'une plate-forme d'animation dynamique unifiée m'a amené à proposer une refonte du modèle informatique de textiles tricotés présenté par Jean-Michel Nourrit afin de répondre aux impératifs du nouveau moteur générique. Cette circonstance opportune fut l'occasion de proposer à la fois une unification et une abstraction de la démarche de conception du modèle mécanique précédent.

Un échantillon de textile tricoté est représenté par les fils qui le constituent. Ainsi, le modèle que je qualifie d'initial pour le distinguer de l'extension que j'en propose utilise des courbes splines matérielles (c'est-à-dire munies d'une répartition massique et d'une élasticité interne) pour représenter les fils. La structure du tricot déterminée par l'agencement des mailles est traduite par des contraintes géométriques de contact entre courbes splines. En résumé, le modèle mécanique sous-jacent est complètement déterminé par la définition d'une courbe spline matérielle.

La seconde partie du document intitulée « Variétés splines de dimension d » retrace étapes par étapes la construction d'un modèle mécanique pour les corps déformables qui consiste en une généralisation du modèle de courbe spline matérielle. En premier lieu, je propose une expression d'une courbe spline indépendante de la nature de ses fonctions de mélange. Cette première unification vient enrichir le nombre de type de courbes prises en compte par le modèle. En effet, pour des raisons pratiques, Jean-Michel Nourrit avait délibérément limité son travail au cas de courbes de Catmull-Rom. Au vu de la forte similarité d'expression mathématique des courbes, surfaces et volumes splines, je propose une deuxième abstraction visant à unifier l'expression des objets splines vis-à-vis de leur dimension intrinsèque. Le modèle de variétés splines est le fruit de ces deux étapes d'abstraction qui rassemblent dans un même contexte théorique une grande variété de formes.

Ce modèle de nature géométrique est alors envisagé dans un contexte cinématique dans lequel on est amené à définir les degrés de liberté d'une variété qui conditionnent son évolution au fil du temps. L'ajout d'une répartition massique compatible avec la définition géométrique permet d'envisager une formulation particulière des équations du mouvement. En effet, la nature très spécifique d'une variété spline, dont la position des points est issue d'une combinaison linéaire de points de contrôle pondérée par des fonctions d'influence, permet d'opérer des simplifications formelles drastiques pour déboucher sur une expression équivalente optimale des équations de Lagrange.

L'implantation informatique des variétés splines tire parti des avantages de la conception objet tels que le polymorphisme et la généricité pour proposer un modèle informatique fidèle à l'expression mathématique unifiée mais aussi performant en exploitant les propriétés particulières de fonctions de mélange spécifiques.

Ce travail s'inscrit dans une démarche globale et générique visant à proposer un modèle physique et informatique polyvalent pour la représentation de corps déformables à priori quelconques.

Les textiles tricotés constituent alors une des applications envisageables de ce modèle. Le dernier chapitre de la seconde partie développe la façon dont j'utilise le modèle de variété spline pour envisager une modification du modèle initial de tricots afin de concilier rigueur de représentation et performance.



CAISSE A OUTILS THEORIQUES POUR L'ANIMATION DYNAMIQUE

L'animation dynamique fait appel à des disciplines scientifiques autres que l'informatique telles que les mathématiques, la mécanique, l'analyse numérique, etc. Dans ces conditions, l'informaticien ayant enfilé la combinaison de « l'animateur » doit au préalable se doter d'une caisse à outils théoriques s'il veut aboutir avec succès à l'élaboration d'une application de production d'animations régies par les lois de la physique.

Cette nécessité pour l'informaticien de maîtriser des savoirs hors de sa compétence initiale s'imposa très tôt aux membres de l'équipe d'animation dynamique du LERI. Ce n'est pas faire injure à leurs auteurs que de reconnaître que les thèses successives de Didier Gillard et Jean-Michel Nourrit auront permis de débroussailler et d'identifier les problèmes-clefs suscités par la réalisation d'une plate-forme d'animation dynamique. Mais pour des raisons

pragmatiques privilégiant des résultats intermédiaires plutôt qu'une longue et fastidieuse étude théorique, nombre de problèmes restaient en suspens.

Mon arrivée en thèse coïncida avec une profonde restructuration des travaux de l'équipe d'animation qui aboutit à la mise en œuvre d'une plate-forme générique et robuste pour l'animation dynamique. Cette restructuration s'accompagnait d'une forte volonté de rassembler et d'organiser l'ensemble des savoir faire acquis au fil des années et d'approfondir les thèmes jusque là non encore explorés. Le contenu de cette première partie est le fruit de ma contribution à cette volonté de cristalliser la maîtrise de compétences nécessaires à l'animation dynamique à l'aide d'un document de « référence » pour notre groupe d'animation et plus vastement, je l'espère, pour notre communauté.

EQUATIONS DE LAGRANGE : DE LEUR JUSTIFICATION A LEUR MISE EN ŒUVRE INFORMATIQUE

1 Introduction

Une étude bibliographique sur les équations de Lagrange peut, au premier abord, paraître hors sujet au sein d'un mémoire de thèse de doctorat en informatique graphique. Mais en observant l'évolution des travaux de recherche en animation par ordinateur, on réalise que l'usage des équations de la dynamique est de plus en plus fréquent et ne se cantonne plus désormais à la simple utilisation de la loi fondamentale de la dynamique régissant le mouvement d'un point matériel. En effet, les informaticiens n'hésitent plus à recourir à des formalismes physiques de plus en plus complets afin de simuler des phénomènes de plus en plus complexes [O'Brien 1999] [Yngve 2000]. Ainsi l'informaticien, désireux de proposer des modèles informatiques de plus en plus riches pour l'animation, doit maîtriser ces nombreux concepts : au moins doit-il appréhender le sens physique des formalismes qu'il a à sa disposition afin de faire les choix les plus pertinents pour la modélisation informatique d'un phénomène donné. Sous l'impulsion de Yannick Remion, l'équipe d'animation dynamique du LERI a, dès ses premiers travaux [Gillard 1997] [Nourrit 1999], opté pour le formalisme lagrangien : un formalisme puissant permettant de déduire les équations qui conditionnent le mouvement d'une grande variété de systèmes matériels tels que les systèmes de particules, les solides rigides et les solides déformables. Au début de ma thèse j'ai dû, comme les autres doctorants de l'équipe d'animation dynamique avant moi, faire face aux difficultés que représentaient alors les équations de Lagrange. Pour satisfaire ma curiosité intellectuelle et l'envie de devenir plus qu'un « utilisateur » du formalisme lagrangien, j'entrepris à cette époque une étude bibliographique sur les équations de Lagrange qui n'avait initialement pas vocation à être publiée. Assez rapidement, je me trouvais dans un état de grande confusion devant la diversité des approches adoptées par les nombreux ouvrages consacrés à ce sujet [Fox 1967] [Germain 1986] [Arnold 1989] [Calkin 1996] [Bérest 1997]. En plus d'une terminologie rarement unique, les auteurs proposaient des justifications des équations de Lagrange de natures différentes. Il aura fallu attendre le moment où je m'hasardais à la lecture d'un ouvrage d'épistémologie [Barroso Filho 1994] pour commencer à cerner les grandes lignes directrices de la démarche de Joseph Louis Lagrange, me permettant

d'organiser les nombreuses pistes déjà explorées en un raisonnement cohérent. Sur le conseil avisé de Yannick Remion, je commençais la rédaction d'une synthèse des idées principales glanées à droite et à gauche afin de constituer un document de référence pour l'équipe d'animation dynamique du LERI.

Ce document retrace donc la chronologie des étapes majeures du développement des équations de Lagrange, étapes trop souvent éparpillées dans la littérature scientifique contemporaine, en mentionnant les contributions respectives d'illustres savants. J'insiste sur l'existence de deux justifications des équations de Lagrange issues de deux approches intellectuelles distinctes proposées à des époques différentes. Mais il ne s'agit pas de présenter ici des démonstrations mathématiques rigoureuses de ces équations, en effet mon ambition est tout autre : avec ce document, j'espère guider le lecteur au travers des concepts touffus de ce formalisme en lui évitant les travers que j'ai pu rencontrer. Ainsi, les éléments constitutifs des équations de Lagrange sont introduits progressivement, justifiés systématiquement et détaillés dans une optique d'implantation informatique. Je profite aussi de cette étude bibliographique pour fixer la terminologie ainsi que les notations qui seront intensivement utilisées par la suite.

Dans un souci de cohérence, je commence par présenter une chronologie des événements majeurs qui ont permis d'aboutir à la construction de la mécanique analytique. Puis, après avoir introduit les définitions des éléments fondateurs, je présente successivement les deux justifications des équations de Lagrange en insistant sur le principe dont elles découlent et leur champ d'application. Je tiens à mentionner que, pour les besoins de son habilitation à diriger des recherches [Remion 2000], Yannick Remion a prolongé ce travail en exposant un développement plus rigoureux de la seconde preuve des équations de Lagrange.

2 Préambule historique

Dans la chronologie des étapes majeures du développement des équations de Lagrange (Figure 1), je choisis comme point de départ un mémoire d'optique géométrique rédigé par Fermat en 1657 traitant de la réflexion et de la réfraction de la lumière dans des milieux non homogènes. Dans ce document, Fermat faisait la remarque suivante : « ... *la nature agit toujours de manière simple et par moindre dépense* ... ». Cette idée de moindre dépense s'imposa à l'esprit des scientifiques du siècle des lumières comme un principe fondateur. Maupertuis fut le premier, en 1744, à utiliser ce principe dans le cadre de la mécanique sans réussir à justifier son argumentation. Euler, convaincu du bien-fondé du raisonnement de Maupertuis, rédigea un mémoire en 1753 dans lequel il présentait les premiers essais d'une formalisation mathématique du **principe de moindre action**.

Parallèlement aux efforts accomplis en mécanique, les mathématiques étaient aussi en plein essor grâce notamment à l'introduction par Leibniz du calcul différentiel en 1684. Ce calcul offrait une méthode rigoureuse et systématique pour la résolution de problèmes de recherche d'extrema. Le XVIII^{ème} siècle fut marqué par une vive démarche de formalisation mathématique dans le but de faire converger des disciplines à l'époque distinctes telles que la géométrie et l'algèbre. Lagrange fut un acteur majeur de cette démarche de formalisation et présenta en 1759 son **calcul des variations** (nom donné par Euler avec lequel il entretenait une riche correspondance). Lagrange offrait alors à la communauté scientifique un outil

mathématique permettant une formalisation algébrique de la mécanique. Choissant le principe de moindre action comme principe fondateur de la mécanique, Lagrange déboucha sur des équations qui conditionnent le mouvement de systèmes matériels soumis à des efforts conservatifs. Cet événement majeur marqua un tournant dans l'étude du mouvement : la mécanique de Lagrange, algébriquement formalisée, s'éloignait des considérations géométriques. Pour reprendre une citation de Wilton Barroso Filho, « *Lagrange pense la mécanique dans le formalisme* » [Barroso Filho 1994]. La première preuve, issue d'une approche que je qualifie d'intégrale, s'appuie sur ces résultats.

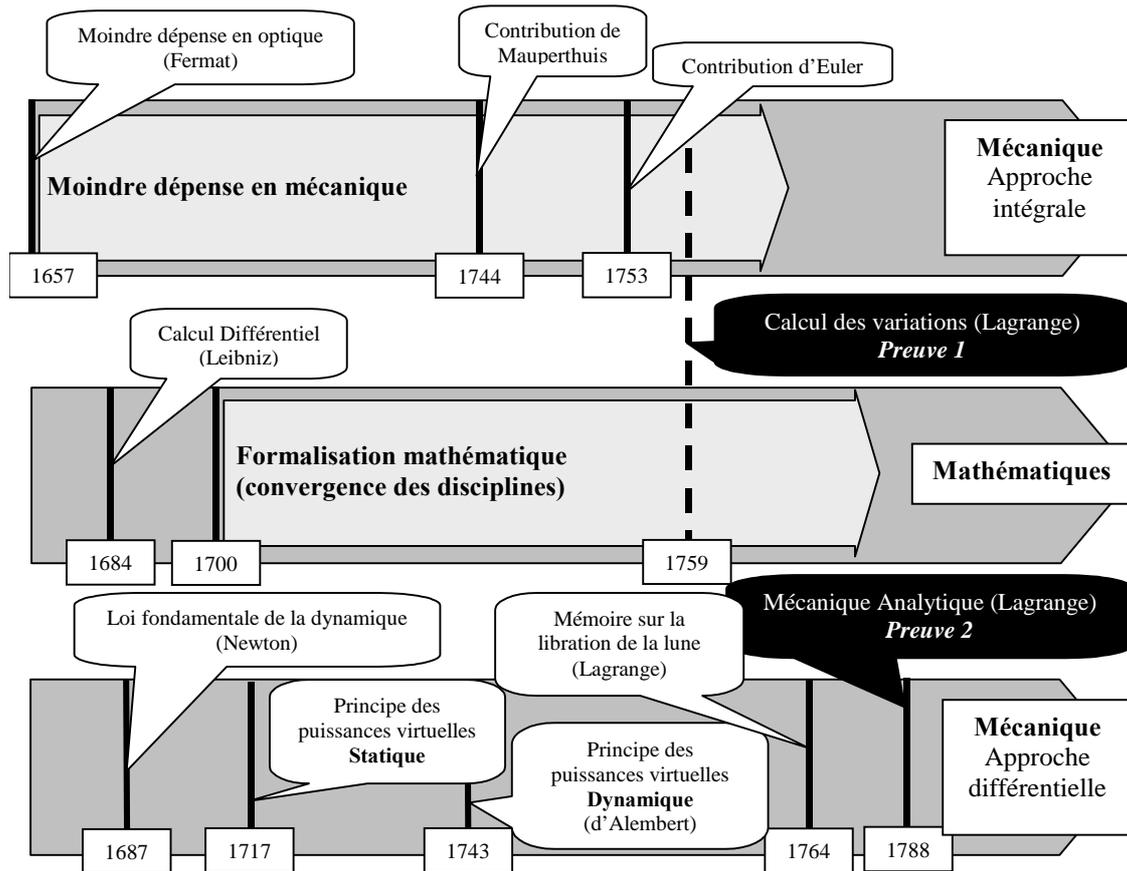


Figure 1 Frise chronologique rassemblant les étapes majeures du développement du formalisme lagrangien.

Il est important de mentionner que Lagrange n'était pas le seul scientifique cherchant à formaliser la mécanique. Dans son « *Traité de la dynamique* » rédigé en 1743, d'Alembert tentait de trouver un principe fondateur et unificateur pour la description du mouvement. Influencé par la loi fondamentale de la dynamique énoncée par Newton en 1687 dans ses « *Principes Mathématiques* », il dirigea ses recherches vers le **principe des puissances virtuelles** issu de la statique qui l'amena à énoncer un principe s'appliquant à la dynamique qui porte désormais son nom. Lagrange, prenant conscience de la qualité du travail de d'Alembert, utilisa son principe et le calcul des variations pour la rédaction d'un mémoire sur la libration de la lune : mémoire qui lui fit décrocher le prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1764. Mais, c'est surtout en 1788, lors de la parution de la « *Mécanique Analytique* » que Lagrange rendit hommage au travail de d'Alembert. Dans cet ouvrage, synthèse d'une vie consacrée à la

formalisation de la mécanique, Lagrange choisit d'adopter le principe de d'Alembert comme principe fondateur. Il en déduit ses équations, élargissant leur domaine d'application aux systèmes matériels soumis à des efforts dissipatifs tels que les forces de frottement. La deuxième preuve détaille cette démarche que je choisis de qualifier d'approche différentielle.

Ces travaux de Lagrange ont contribué à réduire et ordonner les principes connus de la mécanique : le formalisme lagrangien est le résultat de la démarche d'un mathématicien qui parcourt la physique, sans rapport direct avec l'observation. Les équations de Lagrange s'imposèrent alors naturellement par leur indépendance vis à vis de la représentation géométrique du problème mais aussi par leur puissance unificatrice qui avait réconcilié les partisans du principe de moindre action et ceux du principe des puissances virtuelles.

3 Définitions

Je rassemble dans ce paragraphe l'ensemble des définitions importantes communes aux deux preuves des équations de Lagrange. Dans un souci d'homogénéité, je choisis d'adopter les notations couramment utilisées au sein de l'équipe d'animation dynamique du LERI.

3.1 Configuration géométrique

Un **système matériel** est constitué d'un ensemble de corps matériels discrets ou compacts. La **configuration** d'un système matériel synthétise à la fois la position et la forme instantanée de celui-ci. Ainsi, le **mouvement** d'un système matériel correspond à la succession de ses configurations au fil du temps.

De toute évidence, la notion de mouvement est fortement dépendante des conditions d'observation, à savoir le déplacement de l'observateur et l'origine du temps. On nomme **référentiel d'observation** la donnée d'un repère éventuellement mobile lié à l'observateur et d'une origine sur la droite décrite par le temps. Dorénavant, je limiterai mon étude au cas des référentiels galiléens dans lesquels toute particule libre, ne subissant aucune force extérieure, possède un mouvement perçu comme rectiligne uniforme.

La **cinématique** d'un système matériel est la caractérisation mathématique du mouvement de ce système dans un référentiel d'observation donné. Historiquement, on distingue deux approches distinctes pour exprimer la cinématique d'un système matériel (Figure 2). La **description eulerienne** s'appuie sur la connaissance du champ des vitesses instantanées exprimant, en tout point \mathbf{p} de l'espace, la vitesse de la particule occupant la position \mathbf{p} . Il est important de noter que l'on ignore a priori de quelle particule il s'agit. Cette approche est à privilégier dans l'étude de l'écoulement des fluides dont les conditions d'observation ne permettent pas de suivre chaque particule mais plutôt de mesurer les vitesses instantanées en tout point de l'espace. La **description lagrangienne** s'appuie sur la connaissance des trajectoires particulières. Cette approche suppose la possibilité d'identifier chacune des particules à partir d'un état de référence. L'étude du mouvement d'un système matériel cohésif (i.e. un système matériel dont deux particules voisines dans un état de référence demeurent proches au fil du temps) est naturellement envisageable dans une description lagrangienne.

Ainsi pour une description lagrangienne de la cinématique d'un système matériel, chaque particule constitutive d'un corps matériel est identifiée par un élément ω d'un ensemble Ω .

Pour un corps compact, Ω est une partie compacte de \mathbb{R}^d et une partie finie de \mathbb{N}^d pour un corps discret. L'entier d correspond à la dimension intrinsèque du corps matériel. On débouche naturellement sur la définition de **fonction particulière de position**.

$$\chi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \omega) \mapsto \chi(t, \omega) \end{cases} \quad (1.1)$$

$\chi(t, \omega)$ correspond à la position de la particule ω à l'instant t lors de son mouvement.

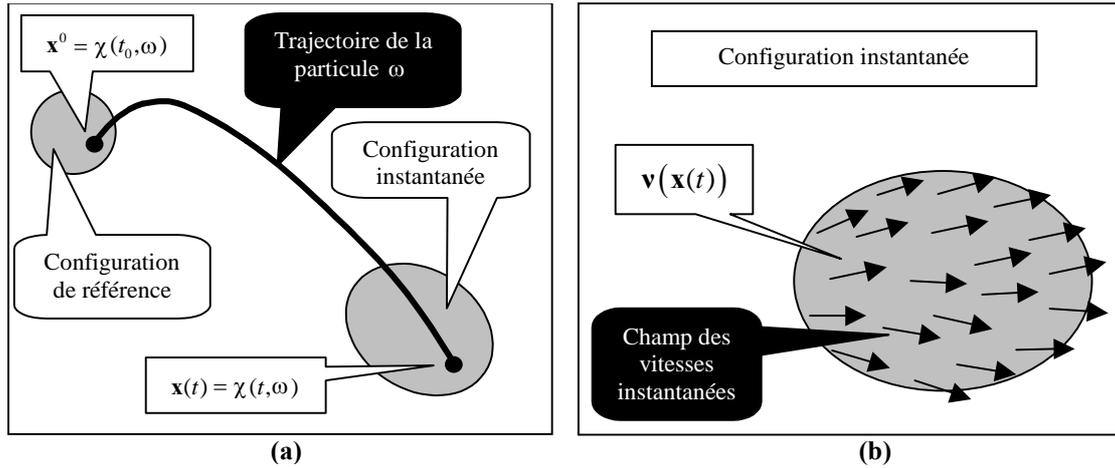


Figure 2 Descriptions lagrangienne (a) et eulerienne (b) du mouvement.

Le mouvement d'un corps matériel discret est entièrement déterminé par le nombre fini de fonctions de position de ses particules. Par contre, le mouvement d'un corps matériel compact constitué d'une infinité de particules ne peut être appréhendé de la même manière. Une démarche classique en mécanique consiste à réduire l'ensemble des configurations envisagées pour le système considéré en s'appuyant sur l'hypothèse d'une certaine cohésion interne.

Cette hypothèse m'amène à considérer que la configuration d'un corps matériel même compact dépend d'un nombre fini de paramètres. On appelle **coordonnées généralisées** (i.e. degrés de liberté) d'un système matériel les n paramètres indépendants et indispensables permettant de déterminer exactement la **configuration** du système.

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \quad (1.2)$$

Le vecteur \mathbf{u} des coordonnées généralisées permet de déterminer la position de chaque particule du système dans cette configuration. Il n'est pas rare que la configuration d'un système matériel dépende explicitement du temps. Afin de prendre en compte cette dépendance explicite du temps de façon naturelle, j'introduis la notion de **configuration étendue** correspondant à un vecteur de dimension $n+1$ défini comme suit :

$$\boldsymbol{\eta} = (t \ \mathbf{u}^T)^T \quad (1.3)$$

Pour la commodité des notations, je choisirai le système d'indexation suivant :

$$\begin{aligned}\eta_0 &= t \\ \eta_i &= u_i \quad \forall i: 1 \leq i \leq n\end{aligned}\tag{1.4}$$

L'espace décrit par les $(n+1)$ -uplets représentant les configurations réellement accessibles par le système est une partie de \mathbb{R}^{n+1} . Cet espace que l'on note \mathbb{U} est appelé **espace des configurations étendues**.

La configuration d'un système matériel doit permettre de déterminer la position de chaque particule constitutive du système. Ainsi La **fonction de positionnement** Φ exprime, à partir d'un descripteur $\boldsymbol{\eta}$ de la configuration du système matériel et d'un identifiant de particule ω , la position dans l'espace \mathbb{R}^3 de cette particule :

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \omega) \mapsto \Phi(\boldsymbol{\eta}, \omega) \end{cases}\tag{1.5}$$

3.2 Contraintes supplémentaires

Comme je l'ai détaillé dans le paragraphe 2.1, une configuration géométrique du système matériel est caractérisée par un vecteur $\boldsymbol{\eta}$ de l'espace des configurations étendues \mathbb{U} .

Si à tout élément $\boldsymbol{\eta}$ de \mathbb{R}^{n+1} correspond une configuration géométrique accessible du système (c'est-à-dire $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{n+1}$), le paramétrage est qualifié de **complet**. Dans le cas contraire (c'est à dire $\mathbb{U} \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$), le paramétrage est qualifié d'**incomplet** (Figure 3). L'ajout de contraintes supplémentaires constitue alors une démarche analytique permettant de caractériser l'espace des configurations étendues \mathbb{U} comme un sous-ensemble strict de \mathbb{R}^{n+1} .

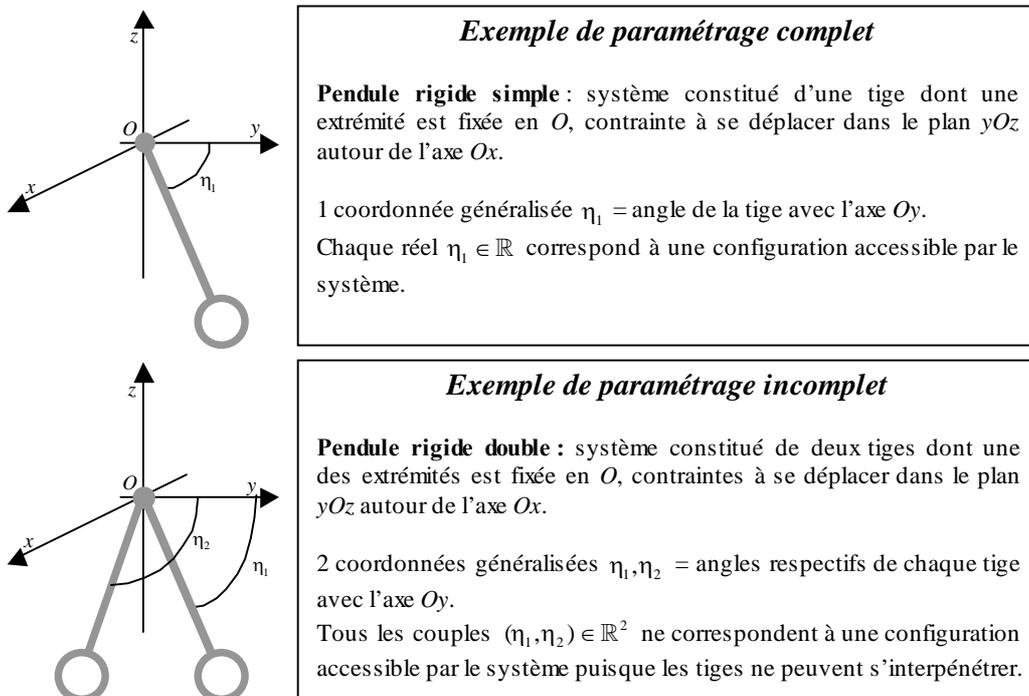


Figure 3 Exemples de paramétrages complet et incomplet.

Ces contraintes supplémentaires interviennent dans le formalisme lagrangien par le biais de conditions analytiques imposées aux coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$. Les contraintes peuvent être répertoriées de plusieurs manières.

Les contraintes **holonomes** s'expriment sous la forme d'une équation implicite des coordonnées généralisées :

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) = 0 \tag{1.6}$$

En présence d'une contrainte holonome, l'espace des configurations étendues \mathbb{U} est restreint à une hyper surface de \mathbb{R}^{n+1} (Figure 4).

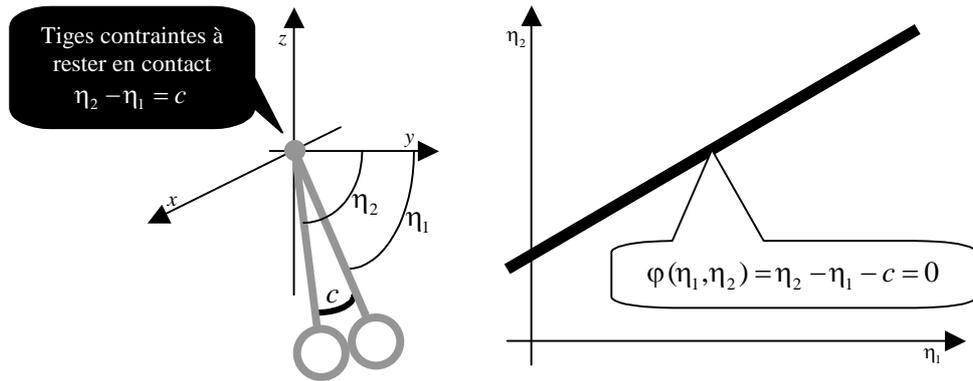


Figure 4 Interprétation géométrique d'une contrainte holonome dans l'espace des configurations, projeté de l'espace des configurations étendues pour $t=cte$.

Les **contraintes unilatérales** s'expriment sous la forme d'une inéquation implicite des coordonnées généralisées :

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) \geq 0 \tag{1.7}$$

En présence d'une contrainte unilatérale, l'espace des configurations étendues \mathbb{U} est restreint à un demi-espace fermé de \mathbb{R}^{n+1} dont la frontière est l'hyper surface $\{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1} : \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 0\}$ (Figure 5).

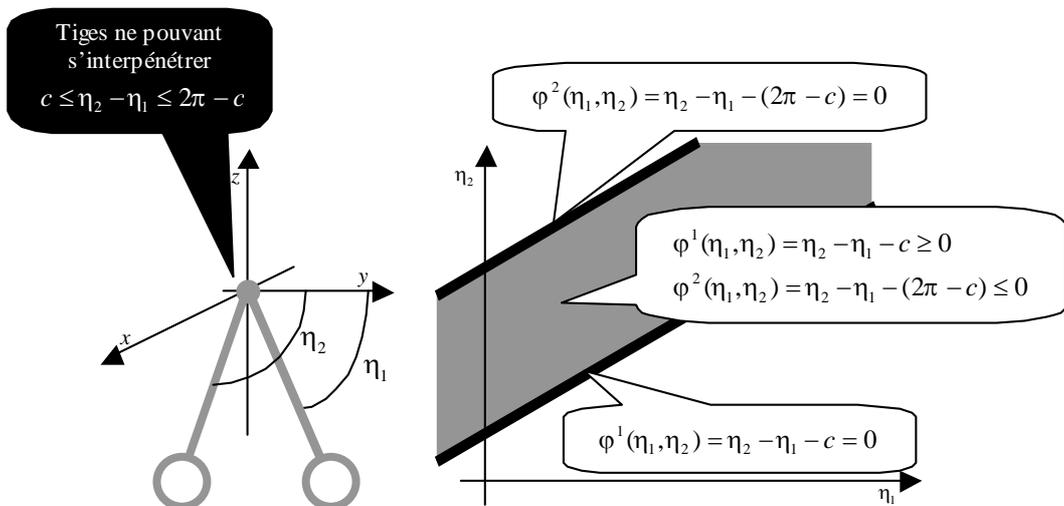


Figure 5 Interprétation géométrique d'une contrainte unilatérale dans l'espace des configurations, projeté de l'espace des configurations étendues pour $t=cte$.

Les contraintes **scléronomes** ne dépendent pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (1.8)$$

Les contraintes **rhéonomes** dépendent explicitement du temps :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\boldsymbol{\eta}) \neq 0 \quad (1.9)$$

En imposant plusieurs contraintes simultanément, l'espace des configurations étendues \mathbb{U} est déduit de l'intersection des sous-ensembles de \mathbb{R}^{n+1} correspondant respectivement à chaque contrainte.

Enfin, Les contraintes **cinématiques** sont des équations qui dépendent à la fois des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ et linéairement des taux de variation $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ des coordonnées, communément appelés **vitesse généralisées**, qui évoluent dans un espace de même dimension que \mathbb{U} noté $\hat{\mathbb{U}}$:

$$\alpha(\boldsymbol{\eta}) \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} = 0 \quad (1.10)$$

On déduit de l'équation (1.10) qu'en présence d'une contrainte cinématique, les vitesses généralisées $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ d'une configuration $\boldsymbol{\eta}$ sont restreintes au plan tangent d'une hyper surface de vecteur normal $\alpha(\boldsymbol{\eta})$.

3.3 Cinématique

Puisque je m'intéresse à l'étude du mouvement, perçu comme une succession de configurations instantanées représentée par une suite de descripteurs $(\boldsymbol{\eta}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ indexée par le temps, je définis la **fonction des configurations étendues** comme une courbe paramétrée de l'espace des configurations étendues \mathbb{U} . Cette fonction notée $\boldsymbol{\varepsilon}$ synthétise l'évolution temporelle des configurations instantanées.

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ t \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\eta}^t \end{cases} \quad (1.11)$$

Muni de cette fonction des configurations, je peux établir une relation simple entre la fonction particulière de position définie en (1.1) et la fonction de positionnement (1.5). En effet, on a :

$$\chi(t, \omega) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \quad (1.12)$$

S'appuyant sur la relation (1.12), je suis en mesure de donner une définition de la **vitesse particulière** à partir de la jacobienne de la fonction de positionnement. Pour cela, on écrit :

$$\mathbf{v}(t, \omega) = \dot{\chi}(t, \omega) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.13)$$

A l'image de la fonction de positionnement, j'introduis une **fonction de vitesse** qui, à partir d'une configuration $\boldsymbol{\eta}$, du taux de variation $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ de cette configuration et d'un paramètre ω caractérisant une particule, donne la vitesse dans l'espace \mathbb{R}^3 de cette particule :

$$\hat{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{U} \times \hat{\mathbb{U}} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \omega) \mapsto \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \omega) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (1.14)$$

Par conséquent, on obtient la relation suivante entre la vitesse particulaire et la fonction de vitesse :

$$\mathbf{v}(t, \omega) = \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \quad (1.15)$$

Cette démarche originale, qui permet de réaliser une séparation du modèle cinématique, est une des contributions importantes de Lagrange à l'essor d'une mécanique mathématiquement formalisée. Dans cette description éloignée des particularités géométriques, on trouve d'un côté les éléments structurels liés à la nature du système matériel tels que la fonction de positionnement et la fonction de vitesse. De l'autre côté, on considère le mouvement défini à partir des fonctions de configuration. Cette séparation me permet d'exprimer la cinématique du système au sein d'un mouvement quelconque $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$. Il suffit pour cela de substituer au **mouvement réel** $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ l'expression du mouvement $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$, qualifié de **mouvement virtuel**.

Les mouvements virtuels, notamment les mouvements voisins du mouvement réel, jouent un rôle très important en mécanique lagrangienne : aussi bien dans l'approche intégrale où le principe de moindre action stipule que le mouvement réel réalise un minimum d'une quantité caractéristique du système parmi un ensemble donné de mouvements virtuels, que dans l'approche différentielle où le principe de d'Alembert repose sur l'expression des puissances virtuelles des efforts pour des mouvements virtuels proches du mouvement réel.

3.4 Dynamique

La seconde étape de la modélisation mécanique s'articule autour de la dynamique du système qui correspond à la caractérisation mathématique des causes de la modification du mouvement. Ces causes sont à la fois représentées par la masse inertielle du système et les efforts qui lui sont appliqués.

La masse inertielle exprime la façon dont est répartie la matière au sein du système matériel. On la définit par le biais d'une fonction de densité massique ρ dépendant explicitement du temps t et de l'identifiant particulaire $\omega \in \Omega$.

$$\rho : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) \mapsto \rho(\omega, t) \end{cases} \quad (1.16)$$

Le terme $\rho(\omega, t)$ équivaut, à l'instant t et pour une particule identifiée par ω , à :

- la masse de la particule dans le cas d'un système matériel discret ($\Omega \subset \mathbb{N}^d$).
- la densité de masse au voisinage de cette particule pour un système matériel compact ($\Omega \subset \mathbb{R}^d$). Ainsi la masse à l'instant t d'un voisinage matériel infinitésimal $d\omega$ de la particule ω est égale à $\rho(\omega, t)d\omega$.

D'autre part les efforts, autres causes de modification du mouvement, peuvent être classés de différentes façons :

- On parle d'effort **intérieur** au système matériel lorsque cet effort est issu de l'interaction de deux corps appartenant au système.
- L'effort est **extérieur** au système matériel si le corps responsable de cet effort n'appartient pas au système.
- Les **efforts donnés** sont des efforts que l'on peut écrire explicitement en fonction des coordonnées et vitesses généralisées (i.e. configuration cinématique) du système matériel.
- Les **efforts de liaison** sont des efforts issus de contraintes liant les coordonnées généralisées et leurs taux de variation, dont on ne dispose pas d'une expression explicite.

L'ensemble des efforts donnés peut être décomposé en :

- un ensemble de forces ponctuelles $\mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ appliquées à des particules ω^i ($1 \leq i \leq m$).
- des densités $\mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega)$ d'efforts appliqués à des sous-ensembles particulières $\Omega^{\mathbf{F}^i}$ du système matériel ($1 \leq i \leq m$).

Un effort de densité $\mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)$ (resp. un effort ponctuel $\mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ appliqué en ω^i) est **conservatif** lorsque son travail estimé entre deux points ne dépend pas du chemin parcouru pour joindre ces deux points. On démontre que cette hypothèse est équivalente à l'existence d'un potentiel réel $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'effort $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)$ dérive.

$$\begin{aligned} \exists U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) &= -\text{grad } U(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)) \\ &(\text{ resp. } \mathbf{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = -\text{grad } U(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega^i))) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Parmi ces efforts conservatifs, on distingue le cas particulier des efforts de gravitation. Ces efforts induits par la masse dérivent de l'**énergie potentielle de gravitation** qui s'exprime de la façon suivante :

$$U^{\text{gravitation}}(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)) = \rho(\omega, t)\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \cdot \vec{g} \quad (1.18)$$

Le vecteur \vec{g} est orienté selon la verticale gravitationnelle, sa norme $\|\vec{g}\|$ est la constante de gravitation locale. Cela suppose que le référentiel terrestre local choisi pour l'étude du mouvement est galiléen : hypothèse vérifiée pour des durées d'observations courtes.

La masse intervient aussi dans la définition de l'**énergie cinétique**, autre quantité caractéristique de la dynamique d'un système matériel dont l'expression est donnée par l'équation (1.19) :

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \dot{\chi}(t, \omega)^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega)^2 d\omega \quad (1.19)$$

Exploitant l'expression particulière de la fonction de vitesse (1.14), on modifie la formulation de l'énergie cinétique pour aboutir à une expression équivalente.

$$K(t) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.20)$$

avec $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)^T \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) d\omega$

Cette nouvelle expression de l'énergie cinétique rejoint la préoccupation initiale de séparer au sein de la dynamique les éléments structurels liés à la nature du système et le mouvement. Les éléments structurels sont représentés par la **matrice des masses généralisées** \mathbf{M} et le mouvement est caractérisé par la fonction de configuration $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ ainsi que sa dérivée temporelle $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$. Fidèle à cette démarche de séparation du modèle, on définit la **fonction d'énergie cinétique** qui, à partir d'une configuration $\boldsymbol{\eta}$ et du taux de variation $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ de cette configuration exprime l'énergie cinétique du système matériel :

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{U} \times \hat{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \mapsto \kappa(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (1.21)$$

4 Approche intégrale

J'ai choisi d'utiliser le terme d'approche intégrale pour désigner cette preuve des équations de Lagrange, la première au sens chronologique, car elle s'intéresse à l'aspect global du mouvement, ce que Euler appelait les **causes finales**. On commence par introduire la notion de lagrangien avant de pouvoir énoncer le principe de moindre action. Les équations de Lagrange sont finalement une conséquence de ce principe fondateur de la mécanique. Je détaille alors le cheminement des calculs qui permettent d'arriver à cette conclusion.

4.1 Lagrangien

Je commence par rappeler brièvement quelques définitions d'analyse fonctionnelle. Soit E un espace de dimension quelconque, on définit $\Gamma^{t_0, t_1}(E)$ l'ensemble des **courbes paramétrées** γ définies sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ à valeurs dans E . Par abus de notation, l'espace des courbes paramétrées sera noté $\Gamma(E)$, sans référence explicite aux bornes de l'intervalle de définition supposées figées dans l'étude.

On utilise la notation suivante pour désigner un élément de $\Gamma(E)$.

$$\gamma : \begin{cases} [t_0, t_1] \rightarrow E \\ t \mapsto \gamma(t) \end{cases} \quad (1.22)$$

Une **fonctionnelle** de E est une application définie sur $\Gamma(E)$ à valeurs réelles. Par exemple, la longueur euclidienne d'une courbe paramétrée $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ est une fonctionnelle de \mathbb{R}^n .

$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{\gamma}(t)^2} dt \quad (1.23)$$

Comme je l'ai mentionné dans le préambule historique, le principe de moindre action repose sur l'idée selon laquelle le mouvement réel d'un système matériel réalise, parmi l'infinité des mouvements virtuels, un minimum de l'intégrale vis-à-vis du temps d'une quantité caractéristique. Cette quantité scalaire $L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$, fonction des coordonnées et des vitesses généralisées, porte le nom de **lagrangien**, en hommage à Joseph Louis Lagrange pour sa contribution décisive dans l'énoncé définitif du principe moindre action. L'expression du Lagrangien peut être justifiée en comparant les équations de Lagrange et la loi fondamentale de la dynamique, qui sont finalement deux principes équivalents pour décrire le mouvement d'un point matériel. Pour cette raison, je donnerai la définition du Lagrangien après avoir présenté les équations de Lagrange.

L'**action du lagrangien** le long d'un mouvement $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(\mathbb{U})$ est une fonctionnelle définie par :

$$S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) dt \quad (1.24)$$

Cette action, qui synthétise le comportement global du système matériel sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$, figure au centre du principe de moindre action.

4.2 Principe de moindre action

Ce principe, qualifié d'**équation d'Euler-Lagrange** dans certains ouvrages [Dacorogna 1992] a pour définition :

Le mouvement réel $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(\mathbb{U})$ d'un système matériel est un minimum local pour l'action du lagrangien.

$$S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \inf_{\boldsymbol{\varepsilon}^* \in V(\boldsymbol{\varepsilon})} S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad (1.25)$$

$V(\boldsymbol{\varepsilon})$ est un voisinage de l'espace $\Gamma(\mathbb{U})$ autour du mouvement réel $\boldsymbol{\varepsilon}$.

En analogie avec la recherche d'extrema dans \mathbb{R}^n qui s'appuie sur l'étude des racines de la différentielle, on cherche à déterminer l'équivalent de la différentielle de l'action du lagrangien. Comme l'espace des mouvements $\Gamma(\mathbb{U})$ n'a pas une structure d'espace vectoriel normé, les règles classiques du calcul différentiel ne peuvent s'appliquer aux fonctionnelles. Le calcul des

variations introduit par Lagrange consiste en une forme dite faible du calcul différentiel [Fox 1987] [Giaquinta 1996]. L'analogie de la dérivée d'une fonctionnelle est nommée **variation**.

Afin de donner la définition de la variation d'une fonctionnelle, on construit des suites continues $(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ de mouvements virtuels convergeant vers le mouvement réel (Figure 6) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^* : \begin{cases} [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{U} \\ t \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t) \end{cases} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+ \quad \text{où} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

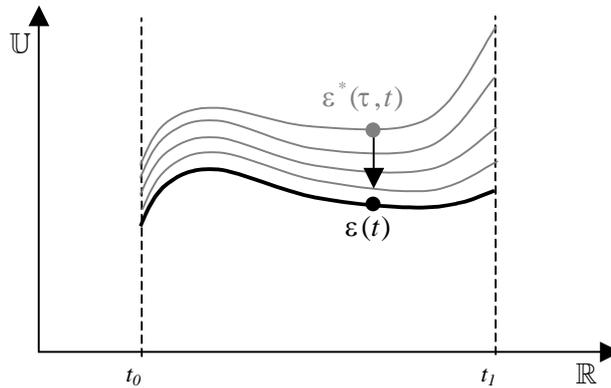


Figure 6 Famille de mouvements virtuels déduite du mouvement réel.

De chacune de ces familles de mouvements virtuels, on déduit l'expression de la **variation du mouvement** [Bérest 1997] :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)}{\tau} \quad (1.27)$$

La variation du mouvement $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ déduite d'une suite de mouvements virtuels $(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ peut être interprétée comme un déplacement infinitésimal autour de $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ à temps constant (Figure 7). L'usage de la notation δ proposée par Lagrange dans son calcul des variations témoigne de son souci de clarté en évitant ainsi de confondre la variation du mouvement $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ et sa différentielle $d\boldsymbol{\varepsilon}(t)/dt$, tangente au mouvement à l'instant t , que l'on a déjà qualifiée de vitesse généralisée.

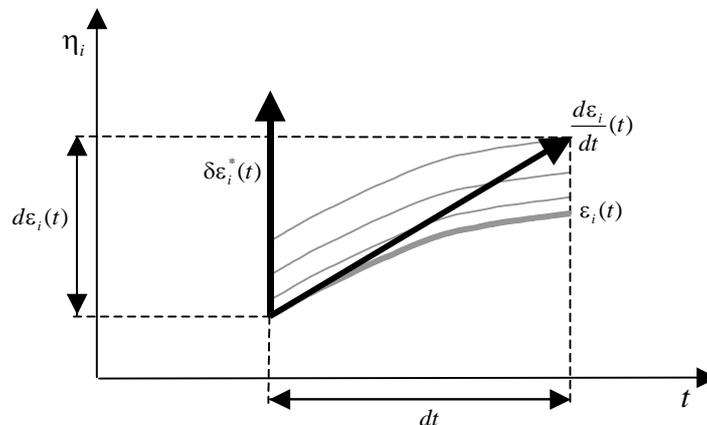


Figure 7 Vitesse généralisée du mouvement vs. variation du mouvement.

La variation δS d'une fonctionnelle S est obtenue par passage à la limite des valeurs de $(S(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t)) - S(\boldsymbol{\varepsilon}(t)))/\tau$ pour les mouvements virtuels construits en (1.26). De façon synthétique, on peut écrire :

$$\delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{S(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t)) - S(\boldsymbol{\varepsilon}(t))}{\tau} \quad (1.28)$$

L'expression de la variation de l'action du lagrangien m'amène à donner un nouvel énoncé du principe de moindre action, communément appelé **forme faible de l'équation d'Euler-Lagrange** :

Le mouvement réel $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(\mathbb{U})$ d'un système matériel est tel que sa variation $\delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*)$ est nulle pour toute famille de mouvements virtuels $(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ satisfaisant la condition (1.26).

$$\begin{aligned} \forall (\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*)_{\tau \in \mathbb{R}^+} : \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^* \in V(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+ \\ \delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

4.3 Equations de Lagrange

La forme faible du principe de moindre action constitue le point de départ de la construction des équations de Lagrange. Je vais présenter maintenant les différentes étapes du développement théorique qui permettent de déboucher sur la forme classique de ces équations. Pour cela, on commence par expliciter l'expression de la variation de l'action du lagrangien (1.24).

$$\begin{aligned} \delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) &= \int_{t_0}^{t_1} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{L(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\tau^*(t)) - L(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))}{\tau} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau i}^*(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)}{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\tau i}^*(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t)}{\tau} dt \end{aligned} \quad (1.30)$$

Puisque les variables τ et t sont indépendantes, on a la relation suivante :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau i}^*(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau i}^*(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)}{\tau} \right) = \frac{d}{dt} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\tau i}^*(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)}{\tau} = \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) \quad (1.31)$$

Ainsi, l'équation (1.30) devient

$$\delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) dt \right\} \quad (1.32)$$

Après intégration par parties du deuxième terme apparaissant dans la somme, on obtient :

$$\delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \delta \varepsilon_i^*(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \right) \delta \varepsilon_i^*(t) dt \right\} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \delta \varepsilon_i^*(t) \right]_{t_0}^{t_1} \quad (1.33)$$

On considère de plus que les mouvements de la famille $(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*)_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ appartenant au voisinage $V(\boldsymbol{\varepsilon})$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont coïncidents en t_0 et t_1 :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_0), \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^*(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_1) \Rightarrow \delta \boldsymbol{\varepsilon}^*(t_0) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^*(t_1) = 0$$

Ainsi
$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau, t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(\tau, t)) \delta \varepsilon_i^*(t) \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.34)$$

On obtient alors l'expression suivante de la variation de l'action du lagrangien :

$$\delta S(\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \right) \delta \varepsilon_i^*(t) dt \quad (1.35)$$

La forme faible du principe de moindre action (1.29) me permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \right) \delta \varepsilon_i^*(t) dt = 0 \quad (1.36)$$

L'égalité (1.36) est valide pour une variation quelconque du mouvement (i.e. pour une famille quelconque de mouvements virtuels). Elle est donc aussi valide pour les n variations unitaires du mouvement, déduites des n familles $(\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^{*j})_{\tau \in \mathbb{R}^+}$ ($1 \leq j \leq n$) de mouvements, dont les coordonnées sont toutes nulles sauf une (1.37).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau^{*j} : \begin{cases} [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{U} \\ (t) \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}_\tau^{*j}(t) \end{cases} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n \quad (1.37)$$

avec $\forall t \in [t_0, t_1] : \delta \varepsilon_i^{*j}(t) = \delta_{ij}$

L'utilisation de ces n variations permet d'aboutir à un système de n équations que l'on nomme **équations de Lagrange** :

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.38)$$

Dans la littérature contemporaine [Germain 1986] [Arnold 1989] [Calkin 1996], il est plus courant de trouver cette expression équivalente des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial L}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.39)$$

4.4 Expression du lagrangien

Il est temps maintenant de donner la définition du lagrangien. Pour cela, il faut considérer le formalisme lagrangien comme une extension de la mécanique à l'étude du mouvement de systèmes matériels autres que des points matériels. Ainsi, les équations de Lagrange doivent être équivalentes à la loi fondamentale de la dynamique dans le cas d'un système matériel réduit à un point.

Je commence par rappeler la définition de la loi fondamentale de la dynamique qui conditionne l'évolution d'un point matériel de masse m , de vitesse $\dot{\mathbf{x}}(t)$ soumis à une force $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.40)$$

L'équation (1.40) est équivalente à un système de 3 équations scalaires.

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}_i(t)) = F_i(\mathbf{x}(t)) \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.41)$$

Si l'on considère que la force $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dérive d'un potentiel U et que l'on se remémore la définition de la fonction d'énergie cinétique (1.21), on obtient une nouvelle formulation du système d'équations de (1.41).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.42)$$

Puisque l'énergie potentielle U ne dépend pas explicitement de la vitesse de la particule et que l'énergie cinétique quant à elle est uniquement fonction de la vitesse,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x}(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.43)$$

on débouche sur l'expression suivante:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}(\kappa(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - U(\mathbf{x}(t))) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\kappa(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) - U(\mathbf{x}(t))) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (1.44)$$

Conformément à l'équation (1.39), le lagrangien d'un point matériel soumis à des efforts conservatifs dérivant d'un potentiel U correspond à la différence de l'énergie cinétique $\kappa(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ et de l'énergie potentielle $U(\mathbf{x}(t))$.

En exploitant la propriété d'additivité particulière des fonctions d'énergie cinétique $\kappa(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ et potentielle $U(\mathbf{x}(t))$ (c'est à dire que l'énergie totale d'un ensemble quelconque de particules est la somme des énergies de chaque particule), le lagrangien d'un système matériel quelconque est défini à partir de la différence de sa fonction d'énergie cinétique et de sa fonction d'énergie potentielle.

$$L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \kappa(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) - U(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\eta}} - U(\boldsymbol{\eta}) \quad (1.45)$$

Le lagrangien ne correspond pas à l'énergie totale du système puisque pour des efforts conservatifs cette quantité est constante. Le lagrangien doit plutôt être perçu comme une mesure des échanges entre énergie potentielle et énergie cinétique. De cette manière, le principe de moindre action postule que le mouvement réel est le mouvement qui tend à minimiser les transferts d'énergie au sein du système matériel.

En substituant l'expression du lagrangien proposée en (1.45) dans l'équation (1.39), on obtient une formulation des équations de Lagrange conforme à celle couramment utilisée [Germain 1986].

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = - \frac{\partial U}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.46)$$

Cette première justification des équations de Lagrange est restreinte au cas du mouvement de systèmes matériels soumis à des efforts conservatifs qui apparaissent dans le formalisme lagrangien par le biais du potentiel dont ils dérivent. Cette restriction sera levée grâce à la deuxième justification des équations de Lagrange présentée dans la section suivante.

5 Approche différentielle

Dans cette partie, je propose une deuxième justification des équations de Lagrange fidèle à celle présentée dans la **Mécanique Analytique** publiée en 1788. Je qualifie cette approche de différentielle car on privilégie ici une étude locale en temps du mouvement, cherchant à en déterminer les variations infinitésimales. La notion de vitesse virtuelle ayant atteint sa maturité, l'énoncé du **principe des puissances virtuelles** s'impose comme principe fondateur et constitue le nouveau point de départ de la construction des équations de Lagrange. Ce principe énoncé dans le cadre de la statique fut étendu au cas de la dynamique grâce à la contribution de d'Alembert.

5.1 Mouvements virtuels

On considère le mouvement $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(\mathbb{U})$ comme le mouvement réel du système matériel, décrivant l'évolution de la configuration géométrique de celui-ci. Au sein de l'espace des configurations étendues \mathbb{U} , on peut construire une infinité de mouvements autres que $\boldsymbol{\varepsilon}$, représentant tous des évolutions géométriques accessibles du système matériel compatibles avec le paramétrage choisi. Ces mouvements que j'ai déjà introduits pour les besoins de l'approche intégrale sont appelés **mouvements virtuels compatibles**.

Puisque l'on focalise l'étude du mouvement du système matériel à un instant donné t' , on s'intéresse plus particulièrement à une sous famille de mouvements virtuels $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ définis comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ t \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) \end{cases} \quad \text{avec } \boldsymbol{\varepsilon}^*(t') = \boldsymbol{\varepsilon}(t') \quad (1.47)$$

Ces mouvements sont appelés les **mouvements virtuels coïncidents en t'** (i.e. coïncidant à l'instant t' avec le mouvement réel). De tels mouvements ont la particularité de conférer au système matériel une configuration identique à celle fournie par le mouvement réel à l'instant donné t' .

Tous ces mouvements étant confondus en t' , la seule caractéristique qui les distingue localement réside dans leur cinématique, c'est à dire l'allure de leurs dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t')$ à l'instant t' . Ainsi, on introduit de nouvelles familles de mouvements virtuels dont la cinématique vérifie certaines conditions. Parmi ces familles, on distingue n classes d'équivalence $(\mathcal{E}^j)_{1 \leq j \leq n}$ distinctes de mouvements virtuels dont les éléments ont des évolutions locales identiques remarquables (1.48). On choisit arbitrairement dans chaque famille \mathcal{E}^j un représentant $\boldsymbol{\varepsilon}^{*j}$ ($1 \leq j \leq n$) qui constituent les **n mouvements figés d'entraînement**.

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon}^* \in \mathcal{E}^j: \boldsymbol{\varepsilon}^*(t') = \boldsymbol{\varepsilon}(t') \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*(t') = \delta_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n \quad (1.48)$$

Localement, les mouvements virtuels figés d'entraînement évoluent respectivement le long d'une seule coordonnée généralisée η_i , et ce à vitesse unitaire. Par la suite, bien que l'on s'intéresse à l'évolution du mouvement à l'instant t' , on utilisera la lettre t pour désigner l'instant d'étude afin de ne pas alourdir les notations

5.2 Vitesse et puissance virtuelles

La **vitesse virtuelle** v^* d'une particule ω dans un mouvement virtuel $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ coïncident est déduite de la substitution de la vitesse généralisée $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ par la vitesse virtuelle généralisée $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)$ dans l'expression de la fonction de vitesse, et ce à temps fixe (i.e. $\varepsilon_0^*(t) = 0$).

$$v^*(t, \omega) = \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t), \omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t), \omega) \dot{\varepsilon}_i^*(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \dot{\varepsilon}_i^*(t) \quad (1.49)$$

La **puissance virtuelle** P^{*F} d'un effort \mathbf{F} dans un mouvement virtuel $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ est un nombre scalaire obtenu par produit scalaire du vecteur d'effort avec la vitesse virtuelle $v^*(t, \omega)$ du point d'application identifié par ω .

Pour un effort ponctuel $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ dont le point d'application est identifié par ω , on a :

$$\begin{aligned} P^{*F} &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)) \cdot v^*(t, \omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)) \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \dot{\varepsilon}_i^*(t) \right\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

On définit alors la puissance virtuelle P^{*F} comme une fonction des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ et de leurs taux de variation réels $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ et virtuels $\hat{\boldsymbol{\eta}}^*$.

$$P^{*F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* \quad (1.51)$$

avec $Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \omega)$

Pour un champ de forces $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \omega)$ de domaine d'application Ω^F , on a :

$$P^{*F} = \int_{\Omega^F} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t), \omega) \cdot \mathbf{v}^*(t, \omega) d\omega$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^F} \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t), \omega) \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) \right\} d\omega \quad (1.52)$$

Tout comme en (1.51), on modifie l'expression de la puissance virtuelle de la manière suivante.

$$P^{*F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* \quad (1.53)$$

avec $Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \int_{\Omega^F} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \omega) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \omega) d\omega$

Le vecteur $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ composé des n termes $Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ est communément appelé vecteur des **forces généralisées** appliquées au système matériel.

Dans le cas particulier d'efforts conservatifs, on a une expression particulière du vecteur des forces généralisées. On suppose l'existence d'un potentiel réel dont le champ de force dérive.

$$\exists U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \omega) = -\text{grad } U(\Phi(\boldsymbol{\eta}, \omega)) \quad (1.54)$$

En introduisant une quantité \tilde{U} qui dépend explicitement de la configuration cinématique du système (coordonnées et vitesses généralisées),

$$\tilde{U} : \begin{cases} \mathbb{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\eta}, \omega) \mapsto \tilde{U}(\boldsymbol{\eta}, \omega) = U(\Phi(\boldsymbol{\eta}, \omega)) \end{cases} \quad (1.55)$$

l'expression de la puissance virtuelle pour cette densité d'efforts particulière devient :

$$P^{*F} = \int_{\Omega^F} \frac{-\partial U}{\partial x}(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)) \cdot \mathbf{v}^*(t, \omega) d\omega$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^F} \frac{-\partial U}{\partial x}(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) d\omega \right\} \hat{\eta}_i^*(t) \quad (1.56)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega^F} \frac{-\partial \tilde{U}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) d\omega \right\} \hat{\eta}_i^*(t)$$

En définitive, on trouve :

$$P^{*F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* \quad \text{avec} \quad Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \int_{\Omega^F} \frac{-\partial \tilde{U}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \omega) d\omega \quad (1.57)$$

5.3 Principe des puissances virtuelles

Maintenant que j'ai donné la définition de la puissance virtuelle, je suis en mesure d'énoncer le premier **principe des puissances virtuelles**. Ce principe qui consiste en une équation bilan n'est valide que dans le cadre de la statique.

Principe statique

Dans un référentiel galiléen, la somme des puissances virtuelles des efforts appliqués à un système matériel au repos est identiquement nulle. Ou de façon plus synthétique :

$$P^{*F} = 0 \quad (1.58)$$

où le vecteur **F** est la résultante de l'ensemble des forces appliquées au système.

5.4 Principe de d'Alembert

L'apport de d'Alembert consiste en l'extension du principe statique des puissances virtuelles à la dynamique. Il introduit pour cela la notion de quantité d'accélération qui intervient dans son principe par le biais de sa puissance virtuelle définie en (1.59).

$$\begin{aligned} P^{*\gamma} &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\rho(\omega, t) v(t, \omega)) \cdot v^*(t, \omega) d\omega \\ &= \sum_{i=0}^n \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega)) \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \omega) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*(t) \right\} d\omega \end{aligned} \quad (1.59)$$

En utilisant les notations introduites pour exprimer les puissances virtuelles des efforts, on a :

$$\begin{aligned} P^{*\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) &= \sum_{i=1}^n P_i^{*\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* \\ \text{avec} \quad P_i^{*\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\rho(\omega, \eta_0) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \omega)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \omega) d\omega \end{aligned} \quad (1.60)$$

le principe de d'Alembert devient alors :

Principe dynamique

Dans un référentiel galiléen, la puissance virtuelle de l'ensemble des efforts appliqués au système est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération de celui-ci. Cet énoncé est résumé par l'équation (1.61).

$$P^{*\gamma} = P^{*F} \quad (1.61)$$

5.5 Equations de Lagrange

Le principe de d'Alembert constitue un autre principe fondateur dont la nature est très différente du principe de moindre action. Mais il apparaît clairement que le champ d'application du principe de d'Alembert est plus vaste que celui du principe de moindre action dans la mesure où les efforts, caractérisés par leurs puissances virtuelles, sont tout à fait quelconques (contrairement au principe de moindre action, qui ne prend en compte que des efforts conservatifs). Ce point fut sûrement crucial dans la décision de Lagrange d'adopter le principe de d'Alembert comme principe fondateur de la mécanique analytique. Je vais maintenant justifier l'équivalence du principe de d'Alembert avec les équations de Lagrange. Je commence par rappeler la définition de la fonction énergie cinétique.

$$\kappa(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega)^2 d\omega \quad (1.62)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) &= \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}_i} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \left(\hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \right)^2 d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \left(2 \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \right) d\omega \end{aligned} \quad (1.63)$$

En exploitant la définition de la fonction de vitesse (1.14), on obtient :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) d\omega \quad (1.64)$$

Puis, en dérivant l'équation (1.64) par rapport au temps, on débouche sur l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \right) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) d\omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) d\omega \end{aligned} \quad (1.65)$$

Le premier terme intégral du membre de droite est constitué de la force généralisée $P_i^{\text{av}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ issue de la puissance virtuelle des quantités d'accélération (1.59).

On s'intéresse maintenant au deuxième terme intégral de l'équation (1.65). Pour en modifier l'expression, j'ai besoin d'utiliser le lemme suivant (démontré en bas de page³).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \quad (1.66)$$

³ $\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_j \partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \dot{\varepsilon}_j(t) = \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_j}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \dot{\varepsilon}_j(t) = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega)$

L'équation devient alors, grâce à l'égalité (1.65) et le lemme (1.66) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) &= P_i^{*\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \\ &+ \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) d\omega \end{aligned} \quad (1.67)$$

Mais le terme intégral de l'équation (1.67) satisfait une autre égalité. En effet,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \omega) d\omega \quad (1.68)$$

Les équations (1.67) et (1.68) m'amènent à écrire :

$$P_i^{*\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \quad (1.69)$$

La puissance virtuelle $P^{*\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ des quantités d'accélération devient alors :

$$P^{*\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) \quad (1.70)$$

Conformément au principe de d'Alembert (1.61) et en utilisant les vitesses virtuelles généralisées des n mouvements figés d'entraînement, on obtient les n équations de Lagrange.

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = Q_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \quad 1 \leq i \leq n} \quad (1.71)$$

5.6 Prise en compte des contraintes

Dans le formalisme lagrangien, les contraintes peuvent être incorporées naturellement aux équations (1.71) par le biais de la puissance virtuelle des efforts nécessaires à leur maintien. Je limite délibérément mon étude à la réalisation des contraintes holonomes, cinématiques et unilatérales. En effet, la prise en compte des contraintes constitue un vaste sujet qui requiert sûrement autant de pages que celles déjà consacrées aux équations de Lagrange. Pour rester fidèle à la démarche adoptée dans cette étude bibliographique, ce paragraphe a pour vocation de donner une interprétation géométrique et si possible intuitive de l'expression des contraintes en formalisme lagrangien.

5.6.1 Contraintes holonomes

Soit une contrainte holonome de la forme :

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (1.72)$$

Tout mouvement virtuel compatible $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ coïncident avec le mouvement réel $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ vérifie les égalités suivantes :

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))=0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \varepsilon_i^*(t) = 0 \quad (1.73)$$

L'équation (1.73) est une relation d'orthogonalité entre le vecteur $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ et les vitesses virtuelles généralisées $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)$ des mouvements compatibles avec la contrainte holonome (1.72). Par conséquent, ces vitesses virtuelles généralisées appartiennent toutes à l'hyperplan de normale $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ (Figure 8).

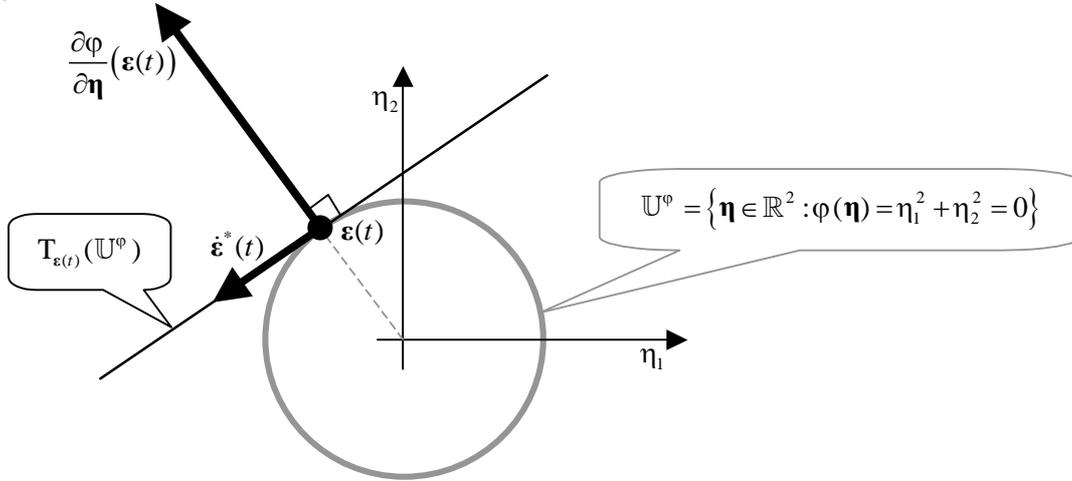


Figure 8 Interprétation géométrique de l'orthogonalité au plan tangent de l'hyper surface issue d'une contrainte holonome dans l'espace des configurations, projeté de l'espace des configurations étendues pour $t=cste$.

D'autre part puisque les liaisons sont considérées comme parfaites, elles respectent la **loi de comportement des liaisons parfaites** [Germain 1986] qui stipule que la puissance virtuelle des efforts issus de ces contraintes est positive ou nulle.

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \varepsilon_i^*(t) \geq 0 \quad (1.74)$$

Le vecteur \mathbf{Q}^{φ} est le vecteur des forces généralisées garantissant la réalisation de la contrainte holonome φ . L'inégalité (1.74) est vérifiée pour tout mouvement virtuel. Ainsi, si l'on considère deux mouvements virtuels compatibles dont les vitesses virtuelles généralisées sont opposées dans l'hyperplan tangent, on arrive à la conclusion suivante :

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \varepsilon_i^*(t) = 0 \quad (1.75)$$

Les équations (1.73) et (1.75) permettent de déduire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^\varphi \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \\ \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \in \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) \quad \text{où} \quad \mathbb{U}^\varphi = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{U} : \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 0\} \end{aligned} \quad (1.76)$$

où l'ensemble $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ correspond à l'espace **tangent** au sous-espace \mathbb{U}^φ en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

D'un point de vue géométrique (Figure 8), une contrainte scalaire portant sur les coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ est une équation implicite, au sens de la géométrie différentielle. Elle restreint donc l'évolution des configurations à une hyper surface de dimension $(n+1) - 1 = n$ de l'espace des configurations étendues \mathbb{U} . L'espace tangent $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ à l'hyper surface \mathbb{U}^φ en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ est de dimension n aussi et a naturellement pour vecteur normal, le vecteur $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}$.

l'espace orthogonal à $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ est appelé l'espace **cotangent** au sous-espace \mathbb{U}^φ en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. On le note $\text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$. Les espaces tangent et cotangent en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ étant supplémentaires,

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) \oplus \text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) \quad (1.77)$$

on a la relation suivante entre les dimensions de chaque espace :

$$\dim \text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) = \dim \mathbb{R}^{n+1} - \dim \mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) = (n+1) - n = 1 \quad (1.78)$$

L'espace cotangent $\text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ associé à l'hyper surface \mathbb{U}^φ est donc de dimension 1, réduit à une droite vectorielle. Par conséquent, tous les vecteurs de $\text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ sont colinéaires. En s'appuyant sur (1.76), on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)), \mathbf{Q}^\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \in \text{co}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^\varphi) \Rightarrow \exists \lambda(t) \in \mathbb{R} : \mathbf{Q}^\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \lambda(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad (1.79)$$

5.6.2 Contraintes cinématiques

Soit une contrainte cinématique de la forme :

$$\psi(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0 \quad (1.80)$$

Tout mouvement virtuel compatible $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ coïncident avec le mouvement réel $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ vérifie aussi l'égalité (1.80).

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t) = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t) = 0 \quad (1.81)$$

L'équation (1.81) est, tout comme l'équation (1.73), une relation d'orthogonalité contraignant les vitesses virtuelles généralisées $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)$ à appartenir à un hyperplan $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ de normale $\mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$.

En supposant les liaisons parfaites et en considérant des vitesses virtuelles généralisées opposées dans $\Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, on obtient la deuxième égalité suivante,

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) = 0 \quad (1.82)$$

Les équations (1.81) et (1.82) permettent de déduire :

$$\mathbf{a} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^{\circ} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \in \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad (1.83)$$

En reproduisant le raisonnement utilisé pour les contraintes holonomes, on aboutit à une conclusion similaire, à savoir :

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)), \mathbf{Q}^{\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \in \text{coT}_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\circ}) \Rightarrow \exists \lambda(t) \in \mathbb{R} : \mathbf{Q}^{\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \lambda(t) \mathbf{a}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad (1.84)$$

5.6.3 Contraintes unilatérales

Soit une contrainte unilatérale de la forme

$$\varphi(\boldsymbol{\eta}) \geq 0 \quad (1.85)$$

En suivant la démarche utilisée dans (1.73), l'équation (1.85) permet de déduire la relation suivante :

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) \geq 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) \geq 0 \quad (1.86)$$

On restreint alors l'ensemble des mouvements virtuels considérés aux mouvements qui garantissent la positivité de l'inéquation (1.86). A partir de ce moment, deux cas de figure se présentent :

D'une part, la contrainte n'est pas réalisée (i.e. $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) > 0$). Toutes les évolutions cinématiques sont donc envisageables et conformément à la loi de comportement des liaisons parfaites (1.75), on a la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \boldsymbol{\varepsilon}_i^*(t) = 0 \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \in \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \mathbf{Q}^{\circ} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (1.87)$$

Les efforts $Q_i^{\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ relatifs à cette contrainte sont donc identiquement nuls. D'autre part, la contrainte est réalisée (i.e. $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)) = 0$). Pour prévenir la violation de la contrainte, les vitesses virtuelles généralisées évoluent dans un des deux demi-espaces de $\hat{\mathbb{U}}$ délimités par l'espace $T_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\circ})$ tangent au sous-espace \mathbb{U}° en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Le vecteur $\partial_{\boldsymbol{\eta}} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ est un vecteur normal à $T_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\circ})$. Ainsi, si l'on considère la décomposition d'une vitesse virtuelle généralisée $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)$ en une composante tangentielle $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)^{\parallel}$ et une composante normale $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)^{\perp}$ (Figure 9), on a :

$$\exists \gamma(t) \in \mathbb{R} : \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)^{\perp} = \gamma(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad (1.88)$$

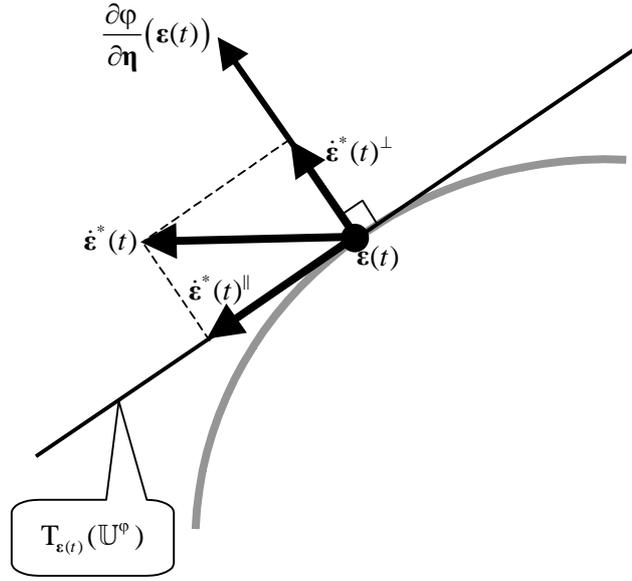


Figure 9 Décomposition du vecteur de vitesse généralisée.

Conformément à l'équation (1.86), on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)^{\parallel} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*(t)^{\perp}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot \left(\gamma(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \right) \geq 0 \quad (1.89)$$

Par conséquent, le scalaire $\gamma(t)$ doit être positif (Figure 10).

D'autre part, puisque les liaisons sont considérées comme parfaites, la puissance virtuelle des efforts issus des contraintes est positive ou nulle.

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*(t) \geq 0 \quad (1.90)$$

Si l'on considère des vitesses virtuelles généralisées appartenant à l'espace tangent $T_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\varphi})$ (i.e. telles que $\gamma(t) = 0$) de directions opposées, on arrive à la conclusion suivante :

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^*(t)^{\parallel} = 0 \quad (1.91)$$

Comme pour les contraintes holonomes, on a finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\parallel} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}^{\varphi} \perp \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\parallel} \\ \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\parallel} \in T_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\varphi}) \quad \text{où} \quad \mathbb{U}^{\varphi} = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{U} : \varphi(\boldsymbol{\eta}) = 0\} \end{aligned} \quad (1.92)$$

où l'ensemble $T_{\boldsymbol{\varepsilon}(t)}(\mathbb{U}^{\varphi})$ correspond à l'espace tangent au sous-espace \mathbb{U}^{φ} en $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$.

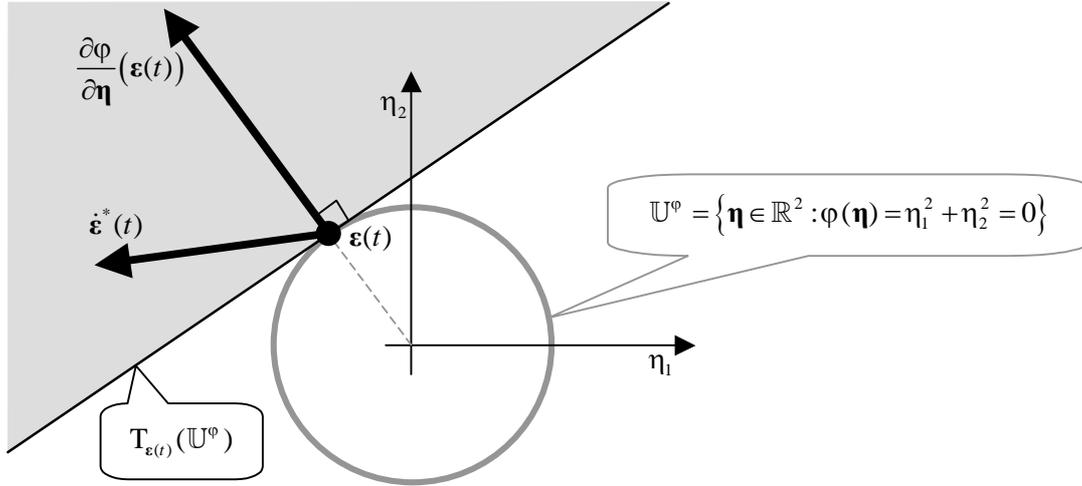


Figure 10 Interprétation géométrique de l'orientation des vitesses généralisées vis à vis du plan tangent de l'hyper surface issue d'une contrainte holonome.

Puisque l'espace cotangent $\text{coT}_{\epsilon(t)}(\mathbb{U}^\varphi)$ est de dimension 1, on déduit que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\epsilon(t)), \mathbf{Q}^\varphi(\epsilon(t)) \in \text{coT}_{\epsilon(t)}(\mathbb{U}^\varphi) \Rightarrow \exists \lambda(t) \in \mathbb{R} : \mathbf{Q}^\varphi(\epsilon(t)) = \lambda(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\epsilon(t)) \quad (1.93)$$

En exploitant la relation de colinéarité de (1.93), on donne une nouvelle expression à la loi de comportement des liaisons parfaites pour une vitesse virtuelle généralisée $\dot{\epsilon}^*(t)^\perp$ définie en (1.88) :

$$\mathbf{Q}^\varphi(\epsilon(t)) \cdot \dot{\epsilon}^*(t)^\perp = \left(\lambda(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\epsilon(t)) \right) \cdot \left(\gamma(t) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\epsilon(t)) \right) \geq 0 \Rightarrow \lambda(t) \geq 0 \quad (1.94)$$

Imposant au coefficient scalaire $\lambda(t)$ d'être positif pour une contrainte unilatérale réalisée.

5.6.4 Multiplicateurs de Lagrange

En conclusion, pour un ensemble de c_1 contraintes holonomes, c_2 contraintes cinématiques et c_3 contraintes unilatérales, la puissance virtuelle des efforts visant à garantir le maintien de ces contraintes est de la forme :

$$P^{* \text{liaisons}}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i^{\text{liaisons}}(\epsilon(t)) \dot{\epsilon}_i^*(t) \quad (1.95)$$

avec $Q_i^{\text{liaisons}}(\epsilon(t)) = \sum_{j=1}^{c_1+c_2+c_3} \lambda_j(t) L_{ji}(\epsilon(t))$

Chaque $\lambda_j(t)$ est une nouvelle inconnue scalaire associée à la contrainte j , communément appelé **multiplicateur de Lagrange**.

$L_{ji}(\epsilon(t))$ est la puissance virtuelle unitaire (i.e. $\lambda_j(t) = 1$) induite par la contrainte j dans un mouvement figé d'entraînement $\dot{\epsilon}^{*i}(t)$. Le vecteur L_j peut être perçu comme la force

généralisée issue de la contrainte j pour une réponse unitaire. A noter que le terme $L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, malgré sa notation ambiguë, n'a rien à voir avec le lagrangien du système matériel.

$$L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \frac{\partial \varphi^j}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \text{ pour une contrainte holonome (ou unilatérale réalisée) } \varphi^j(\boldsymbol{\eta}).$$

$$L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = a_i^j(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \text{ pour une contrainte cinématique } \psi^j(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{a}^j(\boldsymbol{\eta}) \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}.$$

Ainsi, le mouvement $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ d'un système matériel conditionné par j contraintes et soumis à des efforts caractérisés par leur vecteur \mathbf{Q} des forces généralisées est régi par les équations de Lagrange ci-dessous :

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = Q_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) + \sum_{j=1}^c \lambda_j(t) L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad 1 \leq i \leq n$	(1.96)
$\varphi^j(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = 0 \quad 1 \leq j \leq c_1$	
$\mathbf{a}^j(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = 0 \quad c_1 + 1 \leq j \leq c_1 + c_2$	
$\varphi^j(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \geq 0 \quad c_1 + c_2 + 1 \leq j \leq c_1 + c_2 + c_3$	

6 Petit guide à l'attention de l'informaticien

En guise de conclusion, je souhaite d'abord justifier l'intérêt de l'utilisation des équations de Lagrange pour l'animation dynamique. Puis, avec la même volonté de « vulgarisation », je trace les grandes lignes de la modélisation lagrangienne avec une optique d'implantation informatique. Je termine ce chapitre en introduisant une formulation équivalente des équations de Lagrange plus couramment utilisée au sein de la communauté de l'animation.

6.1 Quelques bonnes raisons pour privilégier le formalisme lagrangien

6.1.1 Généricité

Un des avantages du formalisme lagrangien réside dans sa genericité. En effet, l'équation de Newton (i.e. la loi fondamentale de la dynamique) se limite à décrire le mouvement d'un point matériel. Par extension, l'équation de Newton-Euler conditionne l'évolution des solides rigides seulement. Les équations de Lagrange permettent de décrire le mouvement d'une grande variété de systèmes englobant les points matériels ainsi que les corps rigides. Comme je le détaillerai après, il suffit d'être en mesure d'exprimer la fonction d'énergie cinétique d'un système matériel pour déduire les équations qui régissent son évolution, et ce grâce à la démarche lagrangienne. L'impact informatique d'une telle particularité est loin d'être négligeable. En effet, le choix de ce formalisme pour la réalisation d'un moteur d'animation dynamique permet d'envisager une plate-forme logicielle commune et extrêmement modulaire [Baraff 1996] pour l'animation dynamique d'objets de natures très diverses.

6.1.2 Prise en compte naturelle des liaisons

Un autre avantage remarquable du formalisme lagrangien vient de la prise en compte naturelle des liaisons au sein du système. Alors que le formalisme newtonien décrit les mouvements individuels des constituants d'un système en imposant des contraintes *a posteriori* pour représenter les liaisons, le formalisme lagrangien s'appuie sur le jeu de paramètres le plus pertinent (vecteur des coordonnées généralisées) pour décrire l'évolution globale du système. A noter que les paramètres choisis ne correspondent pas forcément à des coordonnées spatiales. Ainsi, les coordonnées généralisées peuvent représenter un angle de rotation ou bien un paramètre identifiant un point d'une courbe paramétrée sur laquelle le corps est contraint à se déplacer. Ici encore l'impact informatique est significatif. En optant pour le formalisme lagrangien, l'évolution du système matériel est caractérisé par le plus petit jeu de variables indépendantes que l'on puisse choisir. Par conséquent, le nombre d'inconnues ainsi que le nombre d'équations à résoudre se trouvent être minimaux permettant de réduire la quantité de mémoire nécessaire mais surtout d'accroître la rapidité de calcul des animations.

6.2 Mise en œuvre informatique

Une préoccupation majeure de l'animateur dans le passage de la théorie physique à l'implantation informatique est de cerner les données nécessaires et suffisantes pour décrire un système matériel. Dans le formalisme lagrangien, l'énergie cinétique est un élément central qui joue un rôle majeur dans l'expression des équations de Lagrange. Afin d'être en mesure d'exprimer l'énergie cinétique d'un système donné, on doit disposer d'un minimum d'informations sur ses propriétés structurelles qui sont rassemblées dans ce que je qualifie de **forme cinématique**. Une forme cinématique est composée des éléments suivants :

- La **dimension cinématique** n correspond à la dimension de l'espace des configurations étendues \mathbb{U} (i.e. au nombre de degrés de liberté) du système.
- L'**espace maximal d'identification particulière** Ω ($\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ pour un corps discret et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pour un corps compact) renseigne sur la répartition interne des particules ainsi que sur la dimension intrinsèque d du système.
- La **fonction de positionnement** Φ exprime, à partir d'un descripteur $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{U}$ de la configuration du système matériel et d'un identifiant de particule $\omega \in \Omega$, donne la position dans l'espace \mathbb{R}^3 de cette particule :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{U} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \omega) \mapsto \Phi(\boldsymbol{\eta}, \omega) \end{cases} \quad (1.97)$$

Un implantation informatique des concepts lagrangiens doit et peut se contenter de l'explicitation de la forme cinématique des systèmes qu'elle est amenée à coder. En effet, à partir de la forme cinématique d'un système matériel, je suis en mesure de donner l'expression de son énergie cinétique en s'appuyant sur la définition suivante :

$$\kappa(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\Omega} \rho(\omega, t) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \omega)^T \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \omega) d\omega \quad (1.98)$$

De même, le coordonnées $Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ vecteur des forces généralisées se déduit naturellement de la forme cinématique et des champs des forces donnés grâce aux relations suivantes :

$$Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \int_{\Omega^F} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\omega}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad \text{pour une densité d'efforts } \mathbf{F} : \mathbb{U} \times \hat{\mathbb{U}} \times \Omega^F \rightarrow \mathbb{R}^3 .$$

$$Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \quad \text{pour un effort } \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \text{ appliqué en } \tilde{\boldsymbol{\omega}} .$$

$$Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \int_{\Omega^F} \frac{-\partial \tilde{U}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad \text{pour une énergie potentielle } \tilde{U} : \mathbb{U} \times \Omega^F \rightarrow \mathbb{R} .$$

6.3 Formulation équivalente des équations de Lagrange

A partir de l'expression particulière de l'énergie cinétique (1.98), on se propose de donner une formulation équivalente des équations de Lagrange ci-dessous

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = Q_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) + \sum_{j=1}^c \lambda_j(t) L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.99)$$

6.3.1 Equations de Lagrange

On s'intéresse d'abord à modifier le membre de gauche de l'équation (1.99). Ainsi, on écrit :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = M_{i\circ}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.100)$$

Après dérivation par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = M_{i\circ}^*(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \left[\sum_{j=0}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_j(t) \frac{\partial M_{i\circ}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_j}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.101)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \frac{\partial M}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.102)$$

Pour alléger les notations, on choisit d'introduire deux nouveaux termes $\mathbf{A}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ et $\mathbf{B}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$.

$$\mathbf{B}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)), \mathbf{A}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$

$$B_{jk}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \frac{\partial M_{jk}}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad , \quad A_{jk}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \frac{\partial M_{ik}}{\partial \eta_j}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = B_{ik}^j(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \quad (1.103)$$

De cette manière, le terme de gauche de l'équation (1.99) devient, en utilisant les matrices définies en (1.103) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = M_{i\circ}^*(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \left[\mathbf{A}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) - \frac{1}{2} \mathbf{B}^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.104)$$

On définit le vecteur $\mathbf{In}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ comme étant le **vecteur des forces généralisées d'inertie**,

$$\mathbf{In}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbb{R}^{n+1} : In_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \left[\mathbf{A}^i(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{2} \mathbf{B}^i(\boldsymbol{\eta}) \right] \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad 1 \leq i \leq n \quad (1.105)$$

le vecteur $\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ correspond au vecteur des forces généralisées totales appliquées au système matériel.

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) - \mathbf{In}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad (1.106)$$

Par conséquent, les équations de Lagrange sont équivalentes au système différentiel suivant :

$$\mathbf{M}^{**}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) + \mathbf{L}^{o*}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (1.107)$$

6.3.2 Equations des contraintes

Mais le système différentiel (1.107) contient plus d'inconnues que d'équations. En effet les multiplicateurs de Lagrange issus des contraintes imposées au système viennent s'ajouter aux inconnues que constituent les coordonnées généralisées. Afin d'injecter de nouvelles équations au système (1.107), on introduit les dérivées des équations de contrainte. Plus précisément, on dérive chaque équation afin de faire apparaître dans leur expression le vecteur des accélérations généralisées $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$.

$$\mathbf{L}^{o*}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = 0 \quad (1.108)$$

La matrice $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$ est composée des termes $L_{ji}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, puissances virtuelles unitaires des efforts de maintien des contraintes. L'expression du terme $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ varie selon la façon dont sont gérées les contraintes. Je détaille par la suite plusieurs stratégies de gestion des contraintes ainsi que l'expression du terme $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ associé.

En rassemblant les équations (1.107) et (1.108), on débouche sur un système complet d'équations différentielles qui consiste en une forme alternative équivalente des équations de Lagrange et des équations de contraintes.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{**}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) & -\mathbf{L}^{o*}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))^T \\ -\mathbf{L}^{o*}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Je reviens maintenant à l'expression du terme $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ figurant dans les équations de contraintes. Je signale au lecteur qu'une étude détaillée de ce problème a été réalisée par Yannick Remion pour les besoins de son habilitation à diriger des recherches [Remion 2000]. Je me contente donc de donner les grandes lignes du développement renvoyant au travail précédemment cité pour de plus amples détails.

Dans une logique théorique, le formalisme lagrangien garantit que les contraintes sont réalisées en tout instant. Par conséquent les équations de contraintes et leurs dérivées successives sont identiquement nulles.

$$\frac{d^2\varphi^i}{dt^2}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))=0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\alpha^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))=0 \quad (1.110)$$

Dans ce cas, le terme $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ équivaut à :

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (1.111)$$

Mais le raisonnement précédent n'est en fait valide que dans une optique de résolution formelle des équations de Lagrange. Lors d'une résolution numérique avec un échantillonnage de l'échelle du temps, les paramètres cinématiques ont des évolutions qui approximent leurs évolutions réelles, induisant une dérive dans la résolution des contraintes. Baumgarte [Baumgarte 1972] propose une solution pour contrecarrer ce problème de dérive en ajoutant des termes correcteurs pondérés par des scalaires $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (1.112).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi^i}{dt^2}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))+\gamma_1 \frac{d\varphi^i}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))+\gamma_2 \varphi^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\alpha^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))+\gamma_3 \alpha^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t))\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.112)$$

Le terme $D_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ associé à la contrainte i devient alors, pour une contrainte holonome et une contrainte cinématique :

$$\begin{aligned} D_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \boldsymbol{\eta}^2}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \gamma_1 \frac{\partial \varphi^i}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \gamma_2 \varphi^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \\ D_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t),\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^T \frac{\partial \alpha^i}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \gamma_3 \alpha^i(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{aligned} \quad (1.113)$$

6.4 Architecture logicielle

En résumé, l'implantation d'un moteur d'animation dynamique lagrangien doit s'articuler autour des grandes étapes suivantes :

Choix d'une forme cinématique

- ① Explicitation de la matrice des masses généralisées $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ et du vecteur des forces généralisées $\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$

Choix d'une modélisation des contraintes

- ② Explicitation de la force généralisée $\mathbf{L}(\boldsymbol{\eta})$ des contraintes et du terme correcteur $\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$

Boucle sur l'intervalle de temps

- ③ Evaluation des termes $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, $\mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$, $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(t))$, $\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ de l'équation (1.109) à l'instant t .
- ④ Résolution numérique du système linéaire (1.109) pour déterminer les valeurs des vecteurs $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ et $\boldsymbol{\lambda}(t)$ à l'instant t .
- ⑤ Résolution numérique itérative de l'équation différentielle du second ordre déduite de l'étape ④ pour évaluer les vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}(t+h)$ et $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t+h)$.
- ⑥ $t \leftarrow t+h$, retour à l'étape ③.

L'étape ⑤ exige d'être capable de trouver une solution approchée d'une équation différentielle du second ordre. Le chapitre suivant, consacré aux méthodes d'intégration numérique, décrit dans le détail la mise en œuvre d'algorithmes de résolution itérative de ces équations différentielles.

METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE

1 Introduction

La particularité de l'animation dynamique, en comparaison avec l'animation par ordinateur qualifiée d'animation traditionnelle, réside dans le fait que les évolutions des objets composant la scène sont déduites de la résolution des équations du mouvement.

Les équations de Lagrange, qui correspondent aux équations du mouvement pour lesquelles nous avons opté, sont équivalentes après simplifications formelles à un système d'équations différentielles (cf Chapitre 1 : Justification des équations de Lagrange). Dans une optique de conception informatique d'un moteur lagrangien généraliste, les équations différentielles déduites d'une modélisation mécanique donnée peuvent être tout à fait quelconques. Ainsi, une résolution exacte du système différentiel par le biais d'une méthode analytique n'est pas envisageable dans notre cadre de travail.

Dans ces conditions, l'intégration numérique semble être la seule issue : elle permet d'obtenir une approximation de la solution exacte du problème différentiel. Les méthodes d'intégration numérique sont nombreuses et variées, adaptées à des problèmes de natures diverses. Mais ces méthodes reposent toutes sur le même schéma : l'échelle du temps, paramètre des évolutions, est discrétisée afin de calculer de façon itérative les valeurs successives d'une solution approchée.

Ce chapitre a pour vocation, après avoir introduit la terminologie liée aux méthodes d'intégration numérique, d'exposer des critères objectifs de comparaison. Par la suite, je donne une classification, selon leur champ d'application, des méthodes les plus courantes. En effet, il semble illusoire de vouloir dresser une liste exhaustive des méthodes d'intégration, un domaine vaste qui constitue encore à ce jour un thème de recherche actif.

2 Définitions

2.1 Discrétisation du problème

On cherche à déterminer une solution approchée de l'équation différentielle (2.1) sur un intervalle de temps borné $[t_0, t_0 + T]$ avec une condition sur la valeur de la solution en t_0 .

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Une équation différentielle telle que (2.1) munie d'une condition initiale est appelée **problème de Cauchy**. Si la fonction f est Λ lipschitzienne par rapport à y sur l'ensemble $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n$ (propriété synthétisée par l'équation (2.2)), le problème de Cauchy admet alors une solution unique $y(t)$ définie sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \Lambda \|y_1 - y_2\| \quad (2.2)$$

Soit $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ une subdivision croissante de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T$$

On pose alors,

$$\begin{aligned} h_n &= t_{n+1} - t_n \\ h_{\max} &= \max_{0 \leq n < N} (h_n) \end{aligned} \quad 0 \leq n < N \quad (2.3)$$

On note y_n la valeur approchée calculée de la solution exacte $y(t_n)$ en t_n . Par suite, on note f_n la valeur de $f(t_n, y_n)$. Ainsi,

$$y_n \approx y(t_n) \quad \text{et} \quad f_n = f(t_n, y_n) \quad (2.4)$$

2.2 Méthodes d'intégration

Une méthode d'intégration est un procédé permettant de déterminer de façon itérative les valeurs approchées successives de la solution du problème (2.1).

- Une méthode d'intégration est dite **explicite** si le calcul de y_{n+1} ne dépend que de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r}$, les valeurs de la solution approchée calculées antérieurement.
- Une méthode d'intégration est dite **implicite** si le calcul de y_{n+1} dépend de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r}$, mais aussi de f_{n+1} , la dérivée de la solution en t_{n+1} approchée par la valeur y_{n+1} .

- Une **méthode d'intégration à un pas** est une méthode qui ne s'appuie que sur la connaissance de y_n (éventuellement de f_{n+1} si la méthode est implicite) pour le calcul de y_{n+1} .
- Une **méthode d'intégration à r+1 pas** (i.e. à pas multiples) est une méthode qui s'appuie sur la connaissance de $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r}$ (ou $f_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r-1}$ si la méthode est implicite) pour le calcul de y_{n+1} .

2.3 Consistance, stabilité et convergence des méthodes d'intégration

J'expose dans ce paragraphe des propriétés associées aux méthodes d'intégration, permettant de les caractériser et de les comparer.

2.3.1 Consistance

L'erreur de consistance e_n à l'étape n correspond à la différence de la solution exacte $y(t_{n+1})$ et de sa valeur approchée y_{n+1} obtenue par intégration numérique en supposant que $y(t_n) = y_n$.

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1} \tag{2.5}$$

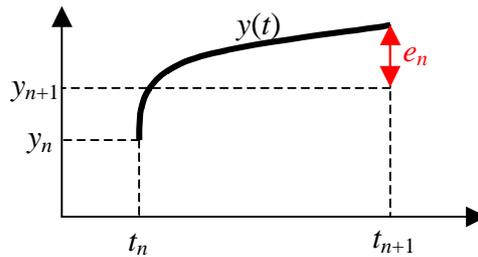


Figure 11 Représentation géométrique de l'erreur de consistance.

L'**erreur de consistance** e_n correspond à une mesure de l'erreur locale générée par la méthode d'intégration lors d'une itération. Cette erreur est aussi qualifiée d'erreur de troncature dans certains ouvrages [Cartwright 1992] en référence à la troncature du développement de Taylor de la fonction $f(t, y)$ pour la construction de certaines méthodes d'intégration numérique.

Une méthode d'intégration est **consistante** si :

$$\sum_{n=0}^N |e_n| \xrightarrow{h_{\max} \rightarrow 0} 0 \tag{2.6}$$

Une méthode d'intégration est d'**ordre p** si :

$$\forall n, 0 \leq n \leq N : e_n = o(h_{\max}^{p+1}) \quad h_{\max} \rightarrow 0 \tag{2.7}$$

(i.e. $\exists C > 0 : |e_n| \leq C.h_{\max}^{p+1}$)

L'ordre d'une méthode d'intégration renseigne sur la précision de la méthode d'intégration. En effet, l'ordre conditionne la rapidité de convergence du terme (2.6) qui représente la somme des

erreurs locales lors du calcul de la solution approchée. Il est clair que plus l'ordre d'une méthode d'intégration est élevé, plus cette méthode est consistante.

2.3.2 Stabilité

La notion de stabilité est quelque peu ambiguë dans ce contexte car on peut à la fois parler de la stabilité de la solution exacte de l'équation différentielle (inhérente à la nature du problème de Cauchy) et de la stabilité de la méthode d'intégration (liée à l'algorithme de la méthode).

Une solution $y(t)$ d'un problème de Cauchy (2.1) est stable (au sens de Liapunov [Dieudonné 1968]) si, pour une valeur initiale \tilde{y}_0 proche de y_0 , la solution exacte $\tilde{y}(t)$ correspondante demeure voisine de $y(t)$ au fil du temps :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } \|y_0 - \tilde{y}_0\| \leq \delta, \text{ on a :} \quad (2.8)$$

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Une **méthode d'intégration est stable** si :

$$\exists S > 0 : \forall (y_n)_{0 \leq n \leq N}, (\tilde{y}_n)_{0 \leq n \leq N} \text{ deux suites de valeurs approchées} \quad (2.9)$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\tilde{y}_n - y_n\| \leq S (\|\tilde{y}_0 - y_0\|)$$

On peut illustrer la notion de stabilité de la méthode d'intégration ainsi : pour une erreur initiale $\|\tilde{y}_0 - y_0\|$, le calcul itératif des valeurs successives y_n et \tilde{y}_n génère un écart $\max \|\tilde{y}_n - y_n\|$ majorable, donc contrôlable. L'équation (2.9) montre que ce critère demeure fortement dépendant de la stabilité de l'équation différentielle que la méthode d'intégration cherche à résoudre. Il semble en effet difficile de formuler un critère objectif de stabilité, complètement indépendant du problème de Cauchy considéré.

Malheureusement dans la pratique, le critère (2.9) est assez difficile à mettre en oeuvre. On trouve dans des ouvrages d'analyse numérique [Hairer 1991] [Cartwright 1992] des définitions alternatives de la stabilité.

La **stabilité absolue** (ou λh -**stabilité**) permet de quantifier la stabilité de la méthode d'intégration pour un problème modèle correspondant à l'équation différentielle linéaire suivante (Figure 12) :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \lambda y(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \text{pour } \alpha, \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

Le problème (2.11) peut être résolu de façon analytique. L'expression de la solution exacte est donnée par l'équation (2.12).

$$y(t) = \alpha e^{\lambda(t-t_0)} \quad (2.12)$$

avec $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ pour $\text{Re}(\lambda) < 0$

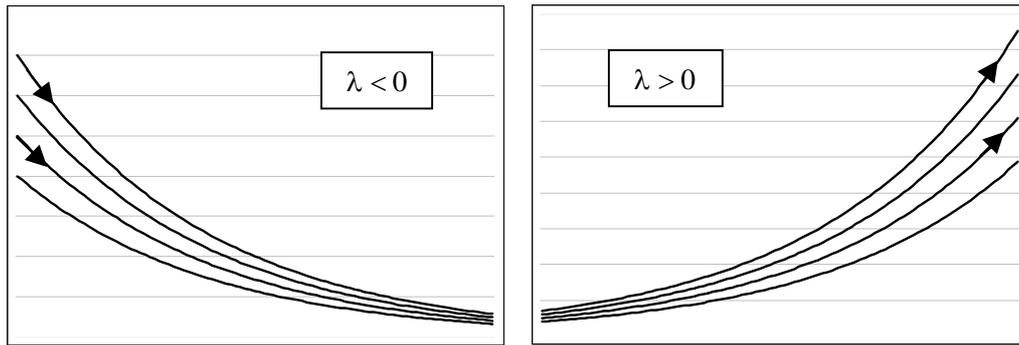


Figure 12 solutions de l'équation différentielle linéaire $y' = \lambda y$, stable pour $\lambda < 0$ et instable pour $\lambda > 0$.

Le **domaine de λh -stabilité** est la région $\{\lambda h : \lambda \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}^+\}$ du plan complexe dans laquelle la méthode d'intégration donne, pour une constante λ et un pas de temps h , une solution approchée du problème (2.11) qui converge aussi vers 0 quand t tend vers $+\infty$. De par leur définition, les domaines de λh -stabilité sont tous homothétiques à un rapport $1/h$ pour un pas de temps h donné (Figure 13).

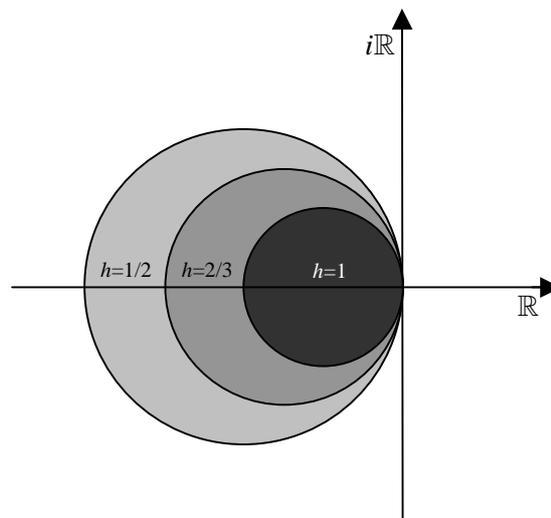


Figure 13 Domaines homothétiques de λh -stabilité de la méthode d'Euler explicite pour $h=1$, $h=2/3$ et $h=1/2$.

Ainsi, pour un pas de temps h de plus en plus petit, les valeurs « acceptables » de λ , pour que la solution approchée converge, sont de plus en plus grandes. Quand le pas de temps h tend vers zéro, les domaines de λh -stabilité convergent plus ou moins rapidement vers le demi plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$.

Naturellement, une méthode d'intégration est d'autant plus stable (au sens de la stabilité absolue) que son domaine de λh -stabilité est grand.

Une méthode d'intégration est **λh -stable** si son domaine de λh -stabilité est le demi plan complexe $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$.

Les domaines de λh -stabilité, même s'ils constituent un critère de comparaison des méthodes d'intégration, ne sont vraiment significatifs que dans le cadre d'un problème linéaire, c'est à

dire des problèmes où $f(t, y) = \lambda y$. Des approches moins répandues donnent une définition de la **stabilité absolue non-linéaire** à partir du problème modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \lambda y(t)(1 - y(t)) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad \text{pour } \alpha, \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.13)$$

Bien que non-linéaire, ce critère s'applique à une équation différentielle particulière et ne permet pas d'extrapoler de façon certaine sur la stabilité de la méthode pour une équation quelconque. Finalement, de par la difficulté de quantifier la notion de stabilité, ces démarches doivent se cantonner à donner une simple indication de stabilité pour une méthode donnée.

2.3.3 Convergence

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.3.1, la consistance de la méthode mesure la précision de la méthode, en supposant qu'à chaque itération la valeur initiale coïncide avec la solution exacte. En pratique, ce cas de figure n'est pas envisageable. Au mieux, on peut espérer qu'au fur et à mesure de la progression du calcul, la valeur approchée reste voisine de la solution exacte. Cette idée est mathématiquement formalisée par la stabilité de la méthode d'intégration. Ainsi, la qualité de la solution approchée dépend simultanément de la consistance et de la stabilité de la méthode d'intégration. Cette notion est synthétisée par la **convergence** de la méthode [Demailly 1991].

On commence par donner la définition de l'**erreur globale** :

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \quad (2.14)$$

L'erreur globale correspond à l'écart entre la solution exacte et la valeur issue des itérations successives lors de l'intégration, englobant l'accumulation des erreurs locales et l'erreur sur la valeur initiale. Une méthode d'intégration est convergente si :

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| \xrightarrow[h_0 \rightarrow y(t_0)]{h_{\max} \rightarrow 0} 0 \quad (2.15)$$

Théorème de la convergence

Si une méthode d'intégration est à la fois consistante (2.6) et stable (2.9), alors cette méthode est convergente.

A noter que l'erreur globale est une erreur théorique, c'est à dire qu'elle ne prend pas en compte les erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs successifs. En pratique, lors des évaluations intermédiaires de la fonction f requises par l'ordre de la méthode d'intégration, l'accumulation des erreurs d'arrondis peut nuire à la précision numérique de la méthode.

2.4 Classification des problèmes d'intégration numérique

A l'aide des définitions précédentes, je suis en mesure de classer les problèmes d'intégration numérique en sous catégories. J'en cite ici deux d'importance majeure.

Les **problèmes bien posés** sont des problèmes dont l'équation différentielle associée est stable au sens de la définition (2.8). En d'autres termes, la fonction $f(t, y)$ est suffisamment lisse (i.e. plusieurs fois différentiable par rapport à la variable y) pour que la solution ne soit pas trop perturbée par une petite variation de la donnée initiale. Ce genre de problèmes ne requiert pas impérativement de méthodes d'intégration stables.

Les **problèmes raides** sont des problèmes qui imposent d'utiliser un pas de temps beaucoup plus petit que celui requis pour satisfaire la consistance [Lambert 1991]. Par exemple, un problème est qualifié de raide lorsque le sens de variation de la fonction f est beaucoup plus important dans une direction que dans d'autres. Plus précisément, si l'on considère les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de la jacobienne de la fonction f , le problème est raide si le **coefficient de raideur** r défini en (2.16) est grand.

$$r = \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{\operatorname{Re} \lambda_1} \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re} \lambda_n < \dots < \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 \quad (2.16)$$

Les problèmes raides nécessitent des méthodes d'intégration stables pour garantir la convergence de la solution approchée.

3 Méthodes d'intégration à un pas

Ce chapitre se focalise sur les méthodes à un pas. Je commence par en donner la forme générale et énoncer les critères de convergence. Puis, j'énumère dans l'ordre chronologique d'apparition quelques méthodes classiques pour finalement aboutir sur l'algorithme de construction de méthodes d'intégration à un pas proposé par Runge et Kutta [Runge 1895] [Kutta 1901] [Crouzeix 1989] [Demailly 1991].

3.1 Méthodes explicites

Toute méthode d'intégration explicite à un pas s'écrit sous la forme suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, h_n) \quad \text{où} \quad \varphi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.17)$$

3.1.1 Critères de convergence

J'expose dans cette section deux résultats classiques en analyse numérique permettant de quantifier à la fois la consistance et la stabilité des méthodes d'intégration à un pas [Crouzeix 1989] [Demailly 1991].

Le premier critère est une condition nécessaire et suffisante de consistance, aisément démontrable à partir du développement de Taylor de la fonction $f(t, y)$:

Si $\varphi \in C^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (i.e. p fois continûment dérivable) et,

$$\forall (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n : \quad \frac{\partial^i \varphi}{\partial h^i}(t, y, 0) = \frac{1}{i+1} f^{(i)}(t, y) \quad (0 \leq i \leq p) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{la méthode est} \\ \text{d'ordre } p+1 \end{array} \quad (2.18)$$

Cas particulier ($p = 0$) :

$$\begin{aligned} \forall (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n : \\ \varphi(t, y, 0) = f(t, y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{la méthode est consistante} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Le deuxième critère est une condition suffisante de stabilité :

$$\begin{aligned} \forall (t, y_1, h), (t, y_2, h) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \\ \|\varphi(t, y_1, h) - \varphi(t, y_2, h)\| \leq \Lambda \|y_1 - y_2\| \Rightarrow \text{la méthode est stable de constante } e^{\Lambda t} \\ (\text{i.e. } \varphi \text{ est } \Lambda\text{-lipschitzienne par rapport à } y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

3.1.2 La méthode d'Euler (1768)

Premièrement, on rappelle que :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (2.21)$$

La méthode repose sur l'idée que pour un réel h suffisamment petit, le terme de droite de (2.21) constitue une approximation satisfaisante de la dérivée (Figure 14). Par substitution dans (2.1), on obtient le système suivant :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx f(y(t), t) \Leftrightarrow y(t+h) \approx y(t) + h f(y(t), t) \quad (2.22)$$

L'équation (2.22) amena Euler à formuler la méthode d'intégration suivante :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \end{cases} \quad (2.23)$$

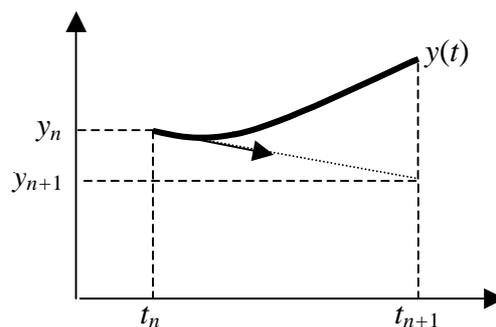


Figure 14 Représentation géométrique de la méthode d'Euler.

La méthode d'Euler vérifie le critère de consistance (2.19) car $\varphi(t, y, h) = f(t, y)$. Très intuitive mais quelque peu grossière, elle est seulement d'ordre 1 puisque $\partial_h \varphi(t, y, h) = 0$ (cf. critère de consistance (2.18)). L'erreur de consistance est donc mal contrôlée. Cette méthode est

une méthode d'intégration faiblement convergente, même pour une fonction $f(t, y)$ satisfaisant les conditions de stabilité.

3.1.3 La méthode de Runge (1895)

Géométriquement, la méthode d'Euler s'appuie sur la pente de la solution de (2.1) en t_n , estimée grâce à la valeur $f(t_n, y_n)$, pour déterminer la valeur approchée y_{n+1} . L'idée de Runge a été d'utiliser la pente estimée de la solution en $t_{n+1/2} = t_n + h_n/2$, au milieu du sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, afin de déterminer y_{n+1} de façon plus précise (Figure 15). C'est pourquoi cette méthode d'intégration porte aussi le nom de **méthode du point milieu**.

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1/2} = y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n) \\ f_{n+1/2} = f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+1/2}\right) \\ y_{n+1} = y_n + h_n f_{n+1/2} \end{cases} \quad (2.24)$$

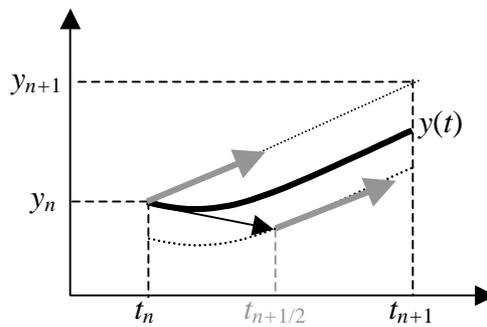


Figure 15 Représentation géométrique de la méthode de Runge.

La méthode de Runge vérifie aussi le critère de consistance (2.19). Conformément à mon intuition, cette méthode est plus précise que la méthode d'Euler puisque son ordre est égal à 2. En s'appuyant sur l'algorithme (2.24), la fonction $\varphi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ associée à la méthode du point milieu s'exprime ainsi :

$$\varphi(t, y, h) = f\left(t + h/2, y + h/2 f(t, y)\right) \quad (2.25)$$

On justifie alors l'ordre de la méthode en vérifiant les égalités du critère de consistance (2.18),

$$\begin{aligned} \varphi(t, y, 0) &= f(t, y), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial h}(t, y, h) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) + \frac{1}{2} f(t, y) \frac{\partial f}{\partial y}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) \frac{dt}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) \right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial h}(t, y, 0) &= \frac{1}{2} \frac{df}{dt}(t, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2}(t, y, h) &= \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial \varphi}{\partial h}(t, y, h) = \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{2} \frac{df}{dt}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial h}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{df}{dt}(t + h/2, y + h/2 f(t, y)) \right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial h^2}(t, y, h) &= \frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dt^2}(t, y) \neq \frac{1}{3} \frac{d^2 f}{dt^2}(t, y)\end{aligned}$$

3.1.4 Construction des méthodes explicites à un pas (1901)

C'est avec le concours de Kutta, que Runge mit au point un procédé de construction de méthodes d'intégration à un pas, englobant et unifiant l'élaboration d'un bon nombre de méthodes existantes. Ils partirent de la constatation suivante :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dy}{dt}(u) du \quad (2.26)$$

Comme $y(t)$ est solution du problème (2.1), on obtient par substitution :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \quad (2.27)$$

Ainsi, sur le sous intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, on peut écrire :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u, y(u)) du \quad (2.28)$$

Avec le changement de variable $u = t_n + v h_n$, on obtient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + v h_n, y(t_n + v h_n)) dv \quad (2.29)$$

En s'appuyant sur (2.29), on débouche alors sur une écriture générique d'une classe de méthodes d'intégration à un pas :

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, h_n) \\ \text{où } \varphi(t_n, y_n, h_n) &\approx \int_0^1 f(t_n + v h_n, y(t_n + v h_n)) dv\end{aligned} \quad (2.30)$$

En définitive, les différentes méthodes d'intégration à un pas de cette nature se distinguent selon la méthode d'approximation du terme intégral utilisée, d'où le choix du terme d'intégration numérique pour désigner les méthodes de résolution numérique des équations différentielles. On présente maintenant en détail l'algorithme de construction de Runge-Kutta.

Soit $(c_n)_{1 \leq n \leq s}$ une subdivision croissante de l'intervalle d'intégration telle que :

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{s-1} \leq c_s \leq 1 \tag{2.31}$$

On pose :

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n$$

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + v h_n, y(t_n + v h_n)) dv \quad 1 \leq i \leq s \tag{2.32}$$

On choisit s méthodes de calcul d'intégrale de coefficients respectifs a_{ij} afin d'estimer les s termes intégraux de (2.32).

$$y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{j=0}^i a_{ij} f_{n,j} \quad 1 \leq i \leq s$$

$$f_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Le calcul de $y_{n,i}$ ne dépend que des valeurs de $f_{n,j}$ pour $0 \leq j < i$ de sorte que les valeurs successives de $f_{n,i}$ peuvent être obtenues de façon itérative sans avoir à recourir à la résolution d'un système linéaire.

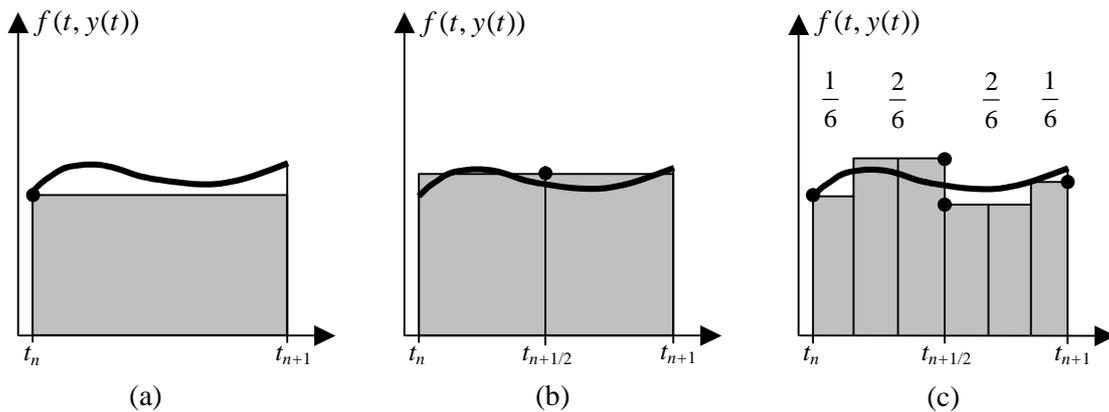


Figure 16 Approximation polygonale du terme intégral de l'équation (2.28) pour la méthode d'Euler (a), la méthode de Runge (b) et la méthode de Runge-Kutta 4 (c).

Finalement, l'expression de (2.29) peut être approchée de la manière suivante en choisissant une méthode d'intégration numérique de coefficients b_i , approximation polygonale de l'aire sous la courbe $f(t, y)$ estimée à partir des valeurs $f_{n,i}$ (Figure 16).

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{n,i} \tag{2.34}$$

En résumé,

$$\left[\begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f_{n,j} \\ f_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{array} \right] \quad 1 \leq i \leq s$$

c_1						
c_2	$a_{2,1}$					
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$				
...			
...		
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	b_{s-1}	b_s

$$\begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{n,i} \end{array}$$

Figure 17 Algorithme de la méthode de Runge Kutta explicite à s étages et son tableau de Butcher associé.

Une telle méthode d'intégration est appelée méthode explicite de Runge-Kutta à s étages (i.e. méthode ERK à s étages). Le tableau de Butcher [Butcher 1964] ci-dessus est une représentation symbolique de la méthode, regroupant tous les paramètres intervenant dans sa construction.

- Les termes $(c_i)_{1 \leq i \leq s}$ sont appelés les nœuds.
- Les termes $(a_{i,j})_{1 \leq j < i \leq s}$ sont appelés les poids intérieurs.
- Les termes $(b_i)_{1 \leq i \leq s}$ sont appelés les poids extérieurs.

3.1.5 Classification des méthodes explicites à un pas

Toutes les méthodes d'intégration présentées auparavant peuvent être représentées à l'aide d'un tableau de Butcher. Dans cette section, on donne une liste non exhaustive de méthodes couramment utilisées, classées par ordre de consistance croissant.

3.1.5.1 Méthode d'ordre 1

0	0
	1

Tableau 1 Méthode d'Euler.

3.1.5.2 Méthodes d'ordre 2

0		
1/2	1/2	
	0	1

(a)

0		
a	a	
	$1 - \frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$

(b)

Tableau 2 (a) Méthode de Runge (i.e. point milieu) (b) Méthode de Runge Kutta 2 avec $0 < a < 1$.

3.1.5.3 Méthodes d'ordre 3

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
	1/4	0	3/4

Tableau 3 Méthode de Heun.

3.1.5.4 Méthodes d'ordre 4

0						0					
1/2	1/2					1/3	1/3				
1/2	0	1/2				2/3	-1/3	1			
1	0	0	1			1	1	-1	1		
	1/6	2/6	2/6	1/6			1/8	3/8	3/8	1/8	

(a) (b)

Tableau 4 (a) Méthode de Runge Kutta 4 (b) Méthode de Runge Kutta.

3.1.5.5 Méthodes d'ordre 5

0											
1/2	1/2										
1/4	1/8	1/8									
1/2	0	0	1/2								
3/4	0	-3/16	6/16	9/16							
1	1/7	4/7	6/7	-12/7	8/7						
	7/90	0	32/90	12/90	32/90	7/90					

Tableau 5 Méthode de Lawson [Lawson 1966].

0											
1/5	1/5										
3/10	3/40	9/40									
3/5	3/10	-9/10	6/5								
9/10	3/40	27/40	-3/5	3/4							
1	107/162	5/2	-140/27	35/9	-70/81						
	8/81	0	25/63	25/108	25/81	-1/28					

Tableau 6 Méthode de Fehlberg [Fehlberg 1974].

3.1.5.6 Méthodes d'ordre 6

1/12									
0	(5-a)/10								
0	-a/10	(5+2a)/10							
0	(-15+7a)/2	(-1+a)/4	(15-7a)/10						
5/12	(5-a)/60	0	1/6	(15+7a)/60					
5/12	(5+a)/60	0	(9-5a)/12	1/6	(-5+3a)/10				
1/12	1/6	0	(-55+25a)/12	(-25-7a)/12	5-2a	(5+a)/2			
	0	(5-a)/10	(5+a)/10	(5-a)/10	(5+a)/10	(5-a)/10	(5+a)/10	(5-a)/10	1

Tableau 7 Méthodes de Butcher pour $a = \pm\sqrt{5}$ [Butcher 1964].

3.1.6 Récapitulatif sur les méthodes explicites à un pas

L'algorithme de Runge-Kutta permet de construire une méthode d'intégration d'un ordre p donné. Par contre, plus l'ordre p est élevé, plus le nombre s d'étages de la méthode est grand. Le tableau 8 synthétise les nombres s d'étages correspondants à plusieurs ordres de consistance p . On remarque que l'ordre 4 constitue un ordre charnière après lequel le nombre d'étages devient plus grand que l'ordre, induisant plus d'évaluations intermédiaires de la fonction $f(t, y)$. Cette propriété contribue à la popularité de la méthode d'intégration explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 (i.e. méthode ERK4).

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	1	2	3	4	6	7	9	11	12-17	13-17

Tableau 8 Récapitulatif des ordres de consistance p et des nombres s d'étages correspondants.

Les méthodes explicites de Runge-Kutta ne sont pas λh -stables. Ces méthodes ne sont donc pas adaptées à la résolution de problèmes raides. La Figure 18 présente les domaines de λh -stabilité des méthodes d'Euler, de Runge et de Runge Kutta 4. Il apparaît que la méthode de Runge-Kutta 4 a le plus grand domaine de stabilité, un autre argument positif en sa faveur.

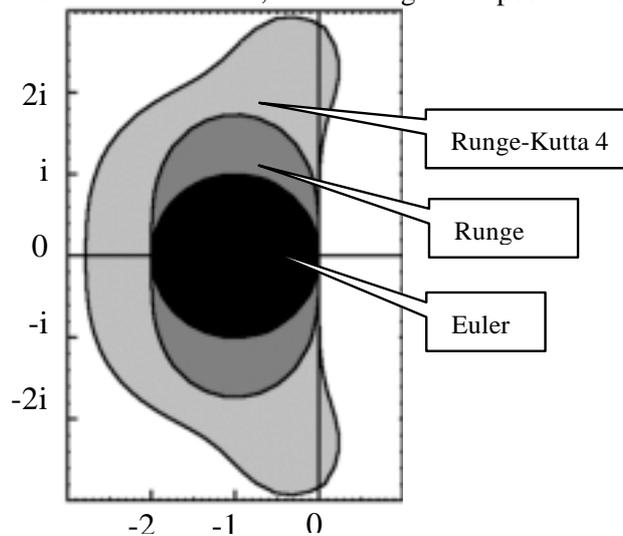


Figure 18 Domaines de λh -stabilité des méthodes d'Euler, de Runge (i.e. point milieu) et de Runge-Kutta 4.

3.1.7 Contrôle de l'erreur, sélection du pas

Le choix du pas de temps lors de la résolution numérique est déterminant sur l'ordre de grandeur de l'erreur globale. En utilisant un pas de temps très faible, on s'assure en général une bonne convergence de la méthode bien que celui-ci, à certains temps de l'intégration, pourrait être plus grand sans pour autant altérer la précision de la solution. Il apparaît donc primordial de mettre en place un mécanisme d'ajustement automatique du pas de temps, garantissant une majoration de l'erreur par une tolérance donnée TOL .

L'**extrapolation de Richardson** (2.35) est une stratégie classique et générique d'ajustement automatique du pas de temps. Ce mécanisme consiste en un premier calcul de la solution approchée y_{n+1} pour un pas de temps h . Puis on calcule une solution approchée $\tilde{y}_{n+1/2}$ pour un pas de temps $h/2$ qui sert de donnée initiale pour le calcul de \tilde{y}_{n+1} pour un pas de temps $h/2$. La solution \tilde{y}_{n+1} issue d'un calcul avec un pas de temps plus petit est plus précise que y_{n+1} .

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, h_n) \\ \tilde{y}_{n+1/2} &= y_n + \frac{h_n}{2} \varphi\left(t_n, y_n, \frac{h_n}{2}\right) \rightarrow \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_{n+1/2} + \frac{h_n}{2} \varphi\left(t_n + \frac{h_n}{2}, \tilde{y}_{n+1/2}, \frac{h_n}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

la différence $ERR = |y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1}|$ fournit une mesure de l'erreur globale qui permet, si besoin est, de diminuer le pas de temps de façon efficace grâce à la formule suivante [Press 1988] :

$$\tilde{h}_n = \begin{cases} \beta h_n \left(\frac{TOL}{ERR}\right)^{1/p} & \text{si } ERR > TOL \\ \beta h_n \left(\frac{TOL}{ERR}\right)^{1/(p+1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \beta < 1 \quad (2.36)$$

p est l'ordre de la méthode d'intégration.

L'extrapolation de Richardson est un mécanisme d'ajustement automatique du pas de temps efficace mais nécessite 3s évaluations de la fonction f pour une méthode explicite de Runge-Kutta à s étages. L'évaluation de la fonction f , correspondant aux efforts appliqués au système dans le cadre de la résolution des équations du mouvement, est en règle générale coûteuse. Cet état de fait a motivé la recherche de méthodes d'ajustement du pas de temps plus optimales.

J. A. Zonneveld [Zonneveld 1964], exploitant les particularités des méthodes de Runge-Kutta, proposa un mécanisme d'ajustement du pas de temps beaucoup plus performant. Il choisit d'utiliser en fait deux **méthodes ERK emboîtées** d'ordres respectifs p et q à s et $s+1$ étages, partageant les mêmes poids intérieurs (Tableau 9). La différence des valeurs y_{n+1} et \tilde{y}_{n+1} déduites des deux intégrations simultanées avec le même pas de temps h fournit aussi une mesure de l'erreur globale. Les deux méthodes partageant les mêmes poids intérieurs, le calcul des valeurs intermédiaires de la fonction f n'est effectué que s fois, contrairement aux 3s évaluations requises par le mécanisme proposé par Richardson pour une méthode de Runge-Kutta à s étages.

c_1							
	$a_{2,1}$						
c_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$					
...				
...			
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$a_{s,s-1}$		
1	b_1	b_2	b_{s-1}	b_s	
	b'_1	b'_2	b'_{s-1}	b'_s	b'_{s+1}

Tableau 9 Couple de méthodes ERK emboîtées à s et $s+1$ étages.

Je présente maintenant plusieurs couples de méthodes ERK emboîtées appelées **paires** (p, q) où p et q sont les ordres respectifs de chaque méthode, classés par ordre de consistance croissant [Stroud 1974] [Crouzeix 1989] [Enright 1995].

0		
1	1	
	1/2	1/2

Tableau 10 Une paire (1,2) de méthodes ERK.

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

Tableau 11 Une paire (2,4) de méthodes ERK.

0					
2/7	2/7				
4/7	-8/35	4/5			
6/7	29/42	-2/3	5/6		
1	1/6	1/6	5/12	1/4	
	11/96	7/24	35/96	7/48	1/12

Tableau 12 Une paire (3,4) de méthodes ERK.

3.2 Méthodes implicites

Toute méthode d'intégration implicite à un pas est de la forme suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, f_{n+1}, h_n) \quad \text{où } \varphi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.37)$$

Contrairement à une méthode d'intégration explicite (2.17), la méthode implicite à un pas requiert l'évaluation du terme f_{n+1} qui équivaut à $f(t_{n+1}, y_{n+1})$. Cette particularité confère en général aux méthodes d'intégration implicites une plus grande stabilité, même dans le cadre des problèmes raides. Alors que les méthodes d'intégration explicites extrapolent la valeur y_{n+1} de

la solution approchée en t_{n+1} en fonction de la tendance en t_n , les méthodes implicites déterminent la valeur y_{n+1} afin qu'elle soit compatible avec les efforts exprimés en t_{n+1} . Mais cette stabilité relative offerte par les méthodes implicites a un prix. En effet, l'équation (2.37) est une équation de nature souvent non linéaire dont la résolution nécessite des méthodes bien plus coûteuses que celles mises en œuvre dans le cadre des méthodes explicites. Les différentes méthodes d'intégration implicites à un pas se distinguent par la stratégie choisie pour résoudre cette équation non linéaire. J'énumère maintenant les schémas de résolution les plus courants.

3.2.1 Résolution par itérations

En considérant que $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$, l'équation (2.37) devient :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, f(t_{n+1}, y_{n+1}), h_n) \quad (2.38)$$

Si on définit la fonction $\Psi(u) = y_n + h_n \varphi(t_n, y_n, f(t_{n+1}, u), h_n) - u$, la résolution de l'équation non linéaire (2.38) se ramène au problème suivant :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que: } \Psi(u) = 0 \quad (2.39)$$

On peut alors envisager de trouver les racines de cette équation non linéaire grâce à des méthodes classiques telles que la méthode de bisection, la méthode de la sécante ou bien la méthode de Newton-Raphson [Press 1988]. Malheureusement, toutes ces méthodes nécessitent la réalisation de critères difficiles à garantir pour un problème quelconque (unicité de la solution dans l'intervalle de recherche par exemple). Et ces méthodes nécessitent un grand nombre d'itérations pour aboutir à une solution convenable. Pour toutes ces raisons, la résolution par itérations est très rarement utilisée dans un cadre généraliste. Pourtant, très récemment, Hauth *et al* [Hauth 2001] proposent d'utiliser une méthode qualifiée de « méthode de Newton simplifiée inexacte » pour la résolution de l'équation linéaire (2.39). En fait, la méthode de Newton repose sur plusieurs résolutions successives de systèmes linéaires faisant intervenir la jacobienne de la fonction Ψ . Pour la résolution de ces systèmes linéaires successifs, ils privilégient la méthode du gradient conjugué, méthode elle aussi itérative qui fournit une solution approchée justifiant ainsi le terme de méthode de Newton inexacte. De plus, pour des raisons de performance, ils imposent que la jacobienne intervenant dans les itérations de la méthode de Newton soit constante. Cette hypothèse nécessaire pour garantir la rapidité de la méthode n'est pas sans conséquences sur la précision de la solution. En fait, ils démontrent l'efficacité de leur démarche pour des systèmes matériels dont les efforts appliqués sont linéaires, par conséquent avec une jacobienne des efforts constante.

3.2.2 Linéarisation

Une autre façon d'entreprendre la résolution de l'équation (2.37) consiste à remplacer $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ par son développement de Taylor à l'ordre 1. Cette opération revient à ne traiter que la partie linéaire du problème en négligeant les termes d'ordre plus élevé. On débouche alors sur une expression linéaire, plus simple à résoudre. Cette technique a été employée par Baraff [Baraff 1998] dans le cadre de l'animation de textiles qui est un domaine réputé pour engendrer des équations du mouvement raides, dues en l'occurrence aux efforts élastiques internes.

On considère la méthode d'intégration d'Euler implicite (2.40) :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (2.40)$$

On réalise alors un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $f(t, y)$ par rapport à la variable y .

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[f(t_{n+1}, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) \right] \quad (2.41)$$

Cette hypothèse permet de déboucher sur le système linéaire suivant :

$$\left[I - h_n \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+1}, y_n) \right] (y_{n+1} - y_n) = h_n f(t_{n+1}, y_n) \quad (2.42)$$

En utilisant la méthode du gradient conjugué pour chaque pas de temps, Baraff détermine en peu d'itérations les valeurs successives y_{n+1} de la solution approchée. Il est important de mentionner que dans cette étude il avait délibérément fait l'hypothèse que les efforts représentés par la fonction $f(t, y)$ dérivait d'un potentiel quadratique. Ainsi, les efforts étaient de nature linéaire. Dans ce cas particulier, le mécanisme de linéarisation n'a pas d'effet « destructeur » sur la fonction d'efforts $f(t, y)$. La particularité de la méthode d'intégration d'Euler implicite, due à sa faible consistance et sa grande stabilité, réside dans le fait que la solution approchée calculée subit un certain amortissement. Cette propriété permettait en l'occurrence d'atténuer les oscillations caractéristiques de masses-ressorts et de produire des animations de textiles très convaincantes en utilisant un pas de temps d'intégration assez grand.

Dans le même ordre d'idée, Desbrun [Desbrun 1999] propose une optimisation de la méthode de Baraff en supposant la matrice du système linéaire (2.42) constante. En considérant le champ de forces stationnaire uniforme (i.e. indépendant du temps et de la position), Desbrun s'éloigne plus encore d'une démarche rigoureuse de modélisation du phénomène physique mais arrive à générer des animations tout à fait convaincantes et ce dans le cadre d'une application de réalité virtuelle dont les contraintes temps réel sont très difficiles à réaliser en général.

Plus récemment, Volino [Volino 2000] s'appuyant sur la précision assez médiocre de la méthode d'Euler, propose une méthode d'intégration implicite déduite de la méthode du point milieu pour résoudre les équations du mouvement d'un système masses-ressorts. Cette méthode d'intégration d'ordre 2 a les mêmes propriétés de stabilité que la méthode d'Euler implicite tout en étant plus précise.

L'engouement récent pour les méthodes d'intégration implicites à un pas par troncature est tout de même à tempérer. Bien que ces méthodes soient stables (en effet les deux méthodes citées ci-dessus sont λh -stables), leur efficacité n'est flagrante que pour le cas particulier d'une fonction d'efforts $f(t, y)$ linéaire. Dans un cadre général, ces méthodes peuvent s'avérer inadaptées à cause de l'élimination des termes d'ordres supérieurs à 2 dans l'expression de $f(t, y)$. De plus, elles reposent sur l'expression explicite de la jacobienne de $f(t, y)$ dont on ne dispose pas a priori

3.2.3 Méthode Prédiction-Evaluation-Correction

Cette dernière approche est sûrement la plus générique puisqu'elle peut être appliquée à une méthode d'intégration implicite quelconque à un pas d'ordre q , de fonction φ^q . En effet, on commence par calculer une valeur \tilde{y}_{n+1} de la solution à l'aide d'une méthode d'intégration explicite d'ordre p ($p < q$) de fonction φ^p : cette étape est qualifiée de **Prédiction**. De manière classique, la valeur \tilde{y}_{n+1} consiste en une extrapolation de la solution en fonction des tendances à l'instant t_n . Mais cette valeur intermédiaire \tilde{y}_{n+1} , après **Evaluation** (i.e. calcul de $f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$), est ensuite injectée dans le terme de droite de la méthode d'intégration implicite (2.37) : cette étape appelée **Correction** permet d'aboutir à la valeur de y_{n+1} .

Ce mécanisme « casse » en quelque sorte la nature implicite de la méthode en recourant à une méthode d'intégration explicite. Ainsi, pour garantir la stabilité de la méthode on peut avoir recours à plusieurs étapes de Prédiction-Correction afin de converger vers une valeur approchée satisfaisante (2.43). Du point de vue méthodologique, ces itérations peuvent être comparées aux itérations requises par la méthode du gradient conjugué dans le cadre des problèmes linéarisés.

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{P E C E C \cdots E C E}^{n \text{ fois}} \\
 P : \text{prédiction} \\
 \tilde{y}_{n+1}^1 = y_n + h_n \varphi^p(t_n, y_n, h_n) \\
 E : \text{évaluation} \\
 \tilde{f}_{n+1}^i = f(t_n, \tilde{y}_{n+1}^i) \\
 C : \text{correction} \\
 \tilde{y}_{n+1}^{i+1} = y_n + h_n \varphi^q(t_n, y_n, \tilde{f}_{n+1}^i, h_n)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} P \\ E \\ C \end{array}} \right\} 1 \leq i \leq n \tag{2.43}$$

4 Méthodes d'intégration à pas multiples

Parallèlement aux travaux menés pour la construction de méthodes d'intégration à un pas, des scientifiques (notamment J.C. Adams) ont mis en place des méthodes de résolution s'appuyant sur la connaissance des valeurs de la solution approchée calculées antérieurement. Les méthodes présentées dans cette section reposent sur la substitution de la fonction $f(t, y)$ par un polynôme interpolant les valeurs $(f_{n-i})_{0 \leq i \leq r}$ [Crouzeix 1989] [Demailly 1991] [Hairer 1993]. Contrairement aux méthodes d'intégration à un pas qui ont recours à des évaluations intermédiaires de la fonction $f(t, y)$ pour calculer la valeur y_{n+1} de la solution approchée, les méthodes d'intégration à pas multiples s'appuient sur la connaissance des valeurs antérieures de $f(t, y)$. Ainsi, à ordre de consistance équivalent, les méthodes à pas multiples sont beaucoup plus rapides que les méthodes à un pas. Cependant, l'usage d'un nombre important de valeurs antérieures pour garantir la consistance peut nuire à la stabilité de la solution déduite d'un polynôme de degré élevé.

Je traite ici des méthodes d'intégration (explicites ou implicites) à $r+1$ pas de la forme :

$$\sum_{i=0}^{r+1} \alpha_i y_{n+1-i} = h_n \sum_{i=0}^{r+1} \beta_i f_{n+1-i} \quad \text{où } \alpha_0 \neq 0 \text{ et } |\alpha_{r+1}| + |\beta_{r+1}| > 0 \quad (2.44)$$

Si $\beta_0 = 0$, la méthode d'intégration est explicite.

4.1 Méthodes explicites

4.1.1 Méthode d'Adams-Bashforth (1855)

Adams choisit d'aborder le problème de la même façon que Runge et Kutta, choisissant comme point de départ la relation (2.27). L'originalité de sa méthode réside dans le fait de remplacer la fonction f par son polynôme d'interpolation aux points $(t_{n-i}, f_{n-i})_{0 \leq i \leq r}$.

On rappelle la définition du **polynôme d'interpolation de Lagrange** :

$$p_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^r f_{n-i} L_{n,i,r}(t) \quad \text{où } L_{n,i,r}(t) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} \quad (2.45)$$

L'expression (2.28) devient alors :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &\approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(u) du \\ &\approx y(t_n) + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i} \quad \text{où } b_{n,i,r} = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(u) du \end{aligned} \quad (2.46)$$

D'où la méthode suivante :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=0}^r b_{n,i,r} f_{n-i} \end{cases} \quad (2.47)$$

La méthode énoncée en (2.47) est appelée méthode d'Adams Bashforth à $r+1$ pas (i.e. méthode AB_{r+1}).

Dans le cadre d'une résolution à pas de temps adaptatif, les termes $b_{n,i,r}$ qui dépendent de la longueur de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ doivent être évalués de nouveau à chaque itération. Par contre, pour une résolution à pas fixe, ces mêmes termes deviennent constants permettant ainsi de déboucher sur une expression simplifiée des méthodes AB_{r+1} .

Je cite en exemple quelques méthodes d'Adams-Bashforth de 1 à 6 pas [Stroud 1974] :

$$r = 0: y_{n+1} = y_n + hf_n$$

$$r = 1: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \right)$$

$$r = 2: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{23}{12} f_n - \frac{16}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} \right)$$

$$r = 3: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right)$$

$$r = 4: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1901}{720} f_n - \frac{2774}{720} f_{n-1} + \frac{2616}{720} f_{n-2} - \frac{1274}{720} f_{n-3} + \frac{251}{720} f_{n-4} \right)$$

$$r = 5: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{4277}{1440} f_n - \frac{7923}{1440} f_{n-1} + \frac{9982}{1440} f_{n-2} - \frac{7298}{1440} f_{n-3} + \frac{2877}{1440} f_{n-4} - \frac{475}{1440} f_{n-5} \right)$$

Une méthode AB_{r+1} est d'ordre $r+1$. A condition d'être en mesure de calculer les r premières valeurs de la solution approchée, ces méthodes semblent performantes dans la mesure où elles ne requièrent pas d'évaluations intermédiaires de la fonction $f(t, y)$ comme les méthodes ERK tout en offrant une bonne consistance. Seule ombre au tableau : les méthodes AB_{r+1} sont peu stables. En effet, les domaines de λh -stabilité de ces méthodes sont plus petits que ceux des méthodes ERK de même ordre de consistance (Figure 19). Ce phénomène peut être en partie expliqué par le caractère oscillant des polynômes d'interpolation pour des valeurs de r de plus en plus grandes.

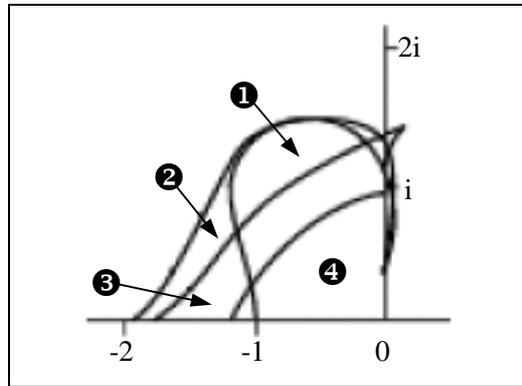


Figure 19 Domaines de λh -stabilité des méthodes d'Adams-Bashforth d'ordre $k=1, 2, 3, 4$.

4.2 Méthodes implicites

4.2.1 Méthode d'Adams-Moulton (1855)

Cette fois-ci, on remplace $f(t, y)$ par son polynôme d'interpolation en $(t_{n+1-i}, f_{n+1-i})_{0 \leq i \leq r}$

$$p_{n,r}^*(t) = \sum_{i=1}^r f_{n-i} L_{n,i,r}^*(t) \quad \text{où} \quad L_{n,i,r}^*(t) = \prod_{\substack{-1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} = \frac{t - t_{n+1}}{t_{n-i} - t_{n+1}} L_{n,i,r}(t) \quad (2.48)$$

En utilisant la même démarche que précédemment, on débouche sur la méthode suivante :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^r b_{n,i,r}^* f_{n-i} \end{cases} \quad \text{où} \quad b_{n,i,r}^* = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}^*(u) du \quad (2.49)$$

La méthode énoncée en (2.49) est appelée méthode d'Adams Moulton à $r+1$ pas (i.e. méthode AM_{r+1}). Lors d'une résolution à pas fixe, les termes $b_{n,i,r}^*$ sont constants permettant ainsi de donner une formulation simplifiée des méthodes AM_{r+1} . Afin d'illustrer cette démarche, j'expose quelques exemples de méthodes d'Adams-Moulton de 1 à 6 pas [Stroud 1974] :

$$r=0: y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$$

$$r=1: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

$$r=2: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right)$$

$$r=3: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right)$$

$$r=4: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{251}{720} f_{n+1} + \frac{646}{720} f_n - \frac{264}{720} f_{n-1} + \frac{106}{720} f_{n-2} - \frac{19}{720} f_{n-3} \right)$$

$$r=5: y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{475}{1440} f_{n+1} + \frac{1427}{1440} f_n - \frac{798}{1440} f_{n-1} + \frac{482}{1440} f_{n-2} - \frac{173}{1440} f_{n-3} + \frac{27}{1440} f_{n-4} \right)$$

Une méthode d'Adams-Moulton à $r+1$ pas est d'ordre $r+2$. De plus, grâce à leur nature implicite, les méthodes AM_{r+1} sont plus stables que les méthodes AB_{r+1} (Figure 20). Par contre l'équation non linéaire induite par les méthodes implicites AM_{r+1} nécessite la mise en œuvre d'une des stratégies mentionnées dans la section 3.2. Classiquement, on utilise un schéma *PEC...EC* en choisissant une méthode AB_{r+1} pour l'étape de prédiction.

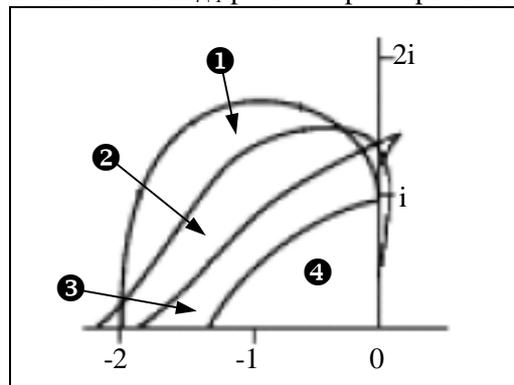


Figure 20 Domaines de λh -stabilité des méthodes d'Adams-Moulton d'ordre $k=1, 2, 3, 4$.

4.2.2 La méthode BDF (Backward Differentiation Formulas)

Au lieu de construire un polynôme d'interpolation pour la fonction $f(t, y)$, la méthode BDF interpole directement les valeurs $(t_{n+1-i}, y_{n+1-i})_{0 \leq i \leq r}$ de la solution approchée.

$$q_{n,r}^*(t) = \sum_{i=1}^r y_{n-i} L_{n,i,r}^*(t) \quad \text{où} \quad L_{n,i,r}^*(t) = \prod_{\substack{-1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}} \quad (2.50)$$

$$\frac{dq_{n,r}^*}{dt}(t) = \sum_{i=1}^r y_{n-i} \frac{dL_{n,i,r}^*}{dt}(t) \quad (2.51)$$

Puisque le polynôme $q_{n,r}^*(t)$ interpole les valeurs de la solution approchée du problème de Cauchy (2.1), on considère qu'il est presque solution du même problème. Ainsi,

$$\frac{dq_{n,r}^*}{dt}(t) \approx f(t, q_{n,r}^*(t)) \Rightarrow \frac{dq_{n,r}^*}{dt}(t_{n+1}) \approx f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{puisque} \quad q_{n,r}^*(t_{n+1}) = y_{n+1} \quad (2.52)$$

On aboutit alors à la méthode d'intégration suivante :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n \\ \sum_{i=1}^r y_{n-i} \frac{dL_{n,i,r}^*}{dt}(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad (2.53)$$

Lorsque l'intégration numérique se fait à pas de temps fixe, on peut procéder au précalcul des dérivées des termes $L_{n,i,r}^*(t_{n+1})$. Je présente quelques exemples de méthodes BDF à 1,2,3 et 4 pas [Hairer 1993] :

$$r = 0: y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$$

$$r = 1: \frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = hf_{n+1}$$

$$r = 2: \frac{11}{6} y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2} y_{n-1} - \frac{1}{3} y_{n-2} = hf_{n+1}$$

$$r = 3: \frac{25}{12} y_{n+1} - 4y_n + 3y_{n-1} - \frac{4}{3} y_{n-2} + \frac{1}{4} y_{n-3} = hf_{n+1}$$

Une méthode BDF à $r+1$ pas est d'ordre $r+1$. De plus, en raison de son schéma de construction, elle est particulièrement stable. Cette méthode est donc à privilégier pour la résolution de problèmes raides.

5 Synthèse

Comme on peut facilement le constater, il semble illusoire de trouver « la » méthode d'intégration numérique générale et efficace au vu de la grande diversité des équations à résoudre. On doit alors se contenter de choisir la méthode la plus appropriée au problème que l'on souhaite traiter.

Méthode	Ordre	Stabilité	Evaluations	Généricité
Euler	1	---	1	oui
Point milieu	2	--	2	oui
Heun	3	--	3	oui
Runge Kutta 4	4	-	4	oui
Lawson	5	--	6	oui
Fehlberg	5	--	6	oui
Butcher	6	---	7	oui
Euler (linéarisation)	1	+++	1+	non
Point milieu (linéarisation)	2	+++	2+	non
AB_{r+1}	$r+1$	--	1	oui
AM_{r+1} $P(EC)^n E$	$r+2$	-	$n+1$	oui
BDF_{r+1} $P(EC)^n E$	$r+1$	++	$n+1$	oui

Tableau 13. Récapitulatif des propriétés des méthodes d'intégration classiques étudiées.

A cette fin, je récapitule dans le tableau 13 les méthodes exposées dans ce chapitre en mentionnant leurs caractéristiques importantes :

- L'**ordre** de la méthode renseigne sur la précision de la méthode d'intégration
- La **stabilité** est une indication sur la capacité de la méthode à converger même face à un problème raide.
- Le nombre d'**évaluations** de la fonction $f(t, y)$ pour une itération.
- La **généricité** indique si la méthode peut s'appliquer à tout type de problèmes ou bien si elle procède à une simplification des termes de l'équation, négligeant certaines quantités.

Les lignes grisées correspondent aux méthodes d'intégration explicites et les lignes blanches aux méthodes d'intégration implicites.

Le nombre d'évaluations pour les méthodes implicites d'Euler et du point milieu sont marqués du signe + car aux évaluations de la fonction $f(t, y)$ il faut ajouter les évaluations de sa jacobienne.

CORPS DEFORMABLES EN ANIMATION DYNAMIQUE. ETAT DE L'ART

1 Introduction

L'animation d'objets déformables constitue en synthèse d'images un véritable défi. En effet, aux difficultés de produire un mouvement global cohérent de ces objets viennent s'ajouter les difficultés de représenter leurs changements complexes de forme. Dès le début des années quatre vingt, les travaux de recherche en animation par ordinateur ont eu recours aux lois de la physique pour représenter les déformations subies par un objet de synthèse. L'utilisation des lois de la dynamique permet de concevoir des animations convaincantes mais surtout assure l'automatisation de la production de celles ci. En effet si l'on confère aux objets de synthèse des propriétés mécaniques, ils évoluent en fonction des contraintes physiques qui leurs sont imposées et ce conformément aux équations du mouvement.

En physique, l'évolution des corps déformables est décrite par la mécanique des milieux continus. Dans ce formalisme, les déformations d'un corps supposé continu dépendent d'une infinité de paramètres. En description lagrangienne, ces paramètres correspondent aux positions dans l'espace de l'infinité des particules qui constituent le corps matériel alors qu'en description eulerienne, ils correspondent à l'infinité des valeurs prises par le champ de vitesses instantanées. Afin d'être en mesure d'exprimer et surtout de résoudre les équations qui régissent le mouvement d'un corps déformable, on doit recourir à une approximation méthodologique qui consiste à réduire le nombre des paramètres qui conditionnent l'évolution du corps. Cette démarche classique en mécanique revient à réduire l'ensemble des configurations d'intérêt garantissant ainsi la finitude des paramètres caractéristiques. Les différents modèles utilisés en synthèse d'images se distinguent par la démarche de réduction de l'ensemble des configurations acceptables mais aussi, en conséquence, par le choix des équations du mouvement. Dans ce chapitre, j'expose les modèles mécaniques les plus couramment utilisés en synthèse d'images, classés en fonction des lois physiques sur lesquelles ils reposent. Puis, j'introduis le modèle innovant que je propose en le comparant aux modèles précédents.

2 Modèles classiques

2.1 Mécanique du point matériel

Les modèles considérés dans cette section s'appuient sur l'hypothèse suivante : le corps déformable étudié est représenté par un **ensemble discret de particules** noté $(\mathbf{x}^i(t))_{1 \leq i \leq n}$. La masse totale du corps est répartie de façon discontinue parmi les particules qui le constituent. Et le mouvement du corps est déduit de façon émergente des mouvements individuels de chaque particule.

La loi fondamentale de la dynamique régit le mouvement d'une particule élémentaire représentée par sa position $\mathbf{x}(t)$, de masse m , soumise à des forces de résultante $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)$.

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \quad (3.1)$$

Les modèles reposant sur cette approche particulière se distinguent en fait par la représentation des interactions entre particules.

2.1.1 Modèle masses-ressorts

Afin de conférer à l'objet déformable une certaine cohésion interne, les particules matérielles (réparties en un réseau uni, bi ou tridimensionnel généralement régulier) sont connectées par des ressorts à leurs particules « voisines » (Figure 21). Pour une particule de position $\mathbf{x}^i(t)$, les ressorts connectés aux particules voisines $\mathbf{x}^j(t)$ pour $j \in V^i$ génèrent des efforts de la forme :

$$\sum_{j \in V^i} \mathbf{F}^{ij}(t) \quad (3.2)$$

$\mathbf{F}^{ij}(t)$ correspond à la réponse du ressort d'extrémités $\mathbf{x}^i(t)$, $\mathbf{x}^j(t)$.

Afin de réduire le comportement oscillatoire du réseau masses-ressorts, on ajoute une force d'amortissement de coefficient γ^i , proportionnelle à la vitesse $\dot{\mathbf{x}}^i(t)$ de la particule i . L'équation fondamentale de la dynamique devient alors, dans le cadre du modèle masses-ressorts,

$$\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{x}}^i(t)) = \sum_{j \in V^i} \mathbf{F}^{ij}(t) - \gamma^i \dot{\mathbf{x}}^i(t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \quad (3.3)$$

Ce modèle fut utilisé très tôt par Platt et Badler [Platt 1981] pour reproduire des expressions du visage. Des points caractéristiques du visage sont reliés par plusieurs ressorts, de sorte que, lorsque plusieurs points sont déplacés, l'ensemble du réseau s'agence en une nouvelle configuration conforme au déplacement subi. Luciani [Luciani 1985] utilisa ce même modèle pour mettre en œuvre un outil d'animation de marionnettes, tandis que Miller [Miller 1988] s'en servit pour animer des reptiles en ajoutant des contraintes de préservation de volume et un modèle de propagation des ondes sinusoïdales au travers du réseau. Plus récemment, le modèle masses-ressorts fut utilisé pour la modélisation de textiles tissés. Provot [Provot 1995], en imposant une distance maximale d'élongation, garantit une réponse non linéaire des ressorts.

Boux de Casson [B. de Casson 2000], autorise l'élimination de certaines connections dans le réseau pour simuler des déchirures.

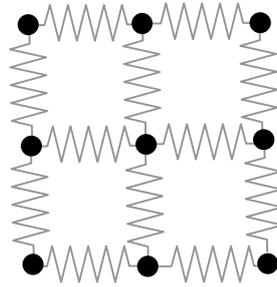


Figure 21 Réseau masses-ressorts bidimensionnel.

En raison de sa simplicité, le modèle masses-ressorts a connu un vif succès au sein de la communauté de l'animation par ordinateur. D'implémentation rapide et potentiellement parallélisable, ce type de modèle permet d'obtenir des animations de bonne facture avec une certaine économie de moyens. Par contre, ce type de modélisation, tout comme les autres d'ailleurs, devient problématique lorsque l'on cherche à représenter des matériaux assez rigides. En effet, à mesure que l'on augmente la raideur k des ressorts liant des particules de masses m , le pas de temps h décroît conformément à la règle de Coulomb.

$$h = \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.4)$$

Baraff [Baraff 1998] propose alors d'utiliser une méthode d'intégration d'Euler implicite pour résoudre le système d'équations différentielles (3.3) réputé pour être un problème « raide » (vous pouvez vous reporter au chapitre consacré à l'intégration numérique pour une définition de ce terme). Bien que la méthode de Baraff garantisse la stabilité de la solution même pour des pas de temps élevés, son domaine d'application est restreint au cas d'efforts linéaires. Dans le même état d'esprit, Volino étend la démarche au cas des efforts quadratiques en utilisant une méthode d'intégration implicite dérivée de la méthode du point milieu [Volino 2000].

Un autre inconvénient du modèle masses-ressorts réside dans l'identification des paramètres. Dans une optique de simulation où l'on dispose des caractéristiques physiques du matériau, quelle structure de réseau privilégier ? Quelles raideurs choisir ? En guise de réponse, Van Gelder [Van Gelder 1998] a démontré l'impossibilité de régler les raideurs d'un modèle masses-ressorts afin de le faire coïncider avec un modèle continu de la matière.

2.1.2 Modèle à base de particules

A l'image du comportement microscopique, les interactions entre particules interviennent ici sous la forme de forces d'attraction répulsion. Le modèle à base de particules, à l'inverse du modèle masses-ressorts, n'est pas un modèle structuré : Cozot [Cozot 1996] utilise le terme de modèle lagrangien libre-libre pour désigner les modèles à base de particules pour les distinguer des modèles lagrangiens libres définis à partir d'un maillage discret évolutif. Les particules sont donc libres et peuvent potentiellement interagir avec toutes les autres particules, alors que le modèle masses-ressorts réduit le nombre d'interactions aux « voisins » de la particule au sein du réseau structuré. Dans la pratique, on a aussi recours à une notion de voisinage lors du calcul

des interactions entre particules afin de réduire l'importante combinatoire résultant d'un grand nombre de particules. Ici le voisinage n'est pas issu d'un graphe de connexion mais d'une distance inter-particules qui correspond à un seuillage des forces d'attraction répulsion (Figure 22). Le grand intérêt des systèmes de particules réside dans la nature a priori quelconque de l'énergie potentielle dont dérivent les forces d'attraction répulsion. Terzopoulos *et al.* [Terzopoulos 1989] simulent des matériaux en fusion en faisant varier l'intensité de la force d'interaction entre deux particules en fonction de la température, jusqu'à l'annuler pour rendre les particules libres de tout mouvement. Breen *et al.* [Breen 1992] mettent à profit cette flexibilité pour simuler le drapé d'un tissu à l'aide d'un système de particules. L'énergie potentielle du système est composée d'une énergie de répulsion pour empêcher le chevauchement de matière et d'énergies pour résister à la traction, à la flexion et au cisaillement. Bien que les résultats soient satisfaisants, la méthode se limite au cas de la statique et surtout, les coefficients de ces énergies sont complètement empiriques. Deux ans après, ils proposent une amélioration de leur modèle [Breen 1994] en utilisant des données expérimentales issues de tests de Kawabata [Kawabata 1980]. Volino *et al.* [Volino 1995] optent aussi pour un système de particules mais pour modéliser le mouvement des textiles. Ils déduisent leurs énergies de la théorie de l'élasticité des coques minces. Enfin, Eberhardt *et al.* [Eberhardt 1996] s'inspirent aussi des données expérimentales de Kawabata pour proposer un modèle dynamique de tissu à base de particules.

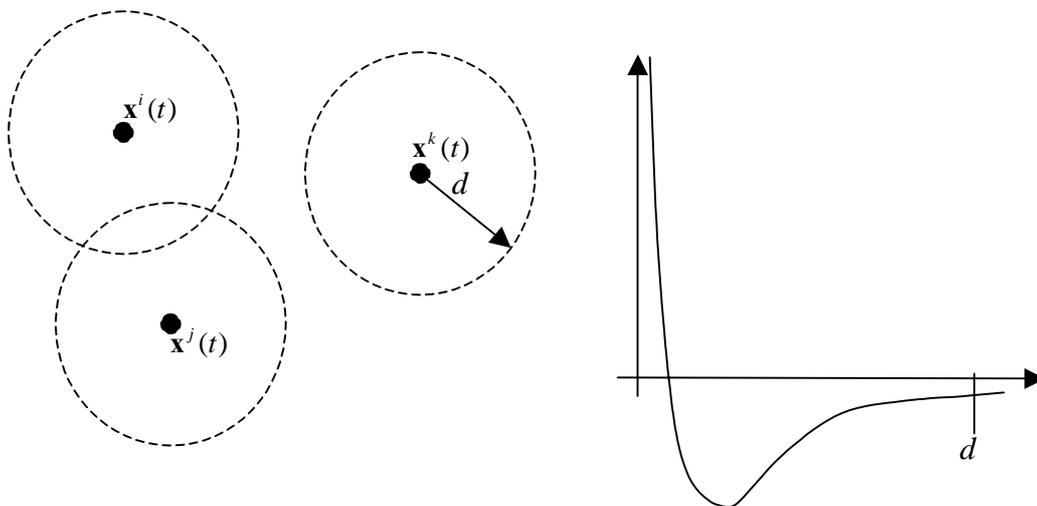


Figure 22 Système de particules et l'énergie potentielle d'attraction répulsion associée. La limite de la zone d'influence entre particules est symbolisée par le cercle en pointillés.

Le modèle à base de particules qui ne souffre pas du problème crucial d'identification des paramètres pose tout de même un problème. En effet, quelle est la validité d'une telle approche, issue d'une observation des phénomènes microscopiques d'attraction répulsion, à l'échelle macroscopique ? De manière équivalente, quelle taille de particules choisir pour obtenir un modèle cohérent ?

2.1.3 Modèle SPH

Le modèle SPH [Benz 1988] qui signifie Smoothed Particle Hydrodynamics est une variante du modèle à base de particules. Il a été introduit par les physiciens pour simuler de façon plus

exacte la dynamique des fluides. Ici, les particules sont désormais considérées comme des positions d'échantillonnage de quantités continues, caractéristiques du milieu simulé. Une expression continue de ces quantités est obtenue par lissage des valeurs échantillonnées à l'aide d'un noyau de lissage W_h . Ce noyau de lissage fournit la distribution massique sur une plage de longueur h . Ainsi un champ scalaire continu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dont on connaît seulement les valeurs f_i estimées aux points d'échantillonnage représentés par les particules, peut être approché par la fonction suivante :

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho(\mathbf{r}_j)} W_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (3.5)$$

La fonction $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ représente la densité massique du milieu, m_j est la masse de la particule j .

Plus encore, des valeurs échantillonnées f_i du champ f , on peut déduire une expression continue approchée de son gradient :

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}) \rangle = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho(\mathbf{r}_j)} \nabla W_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (3.6)$$

Cette démarche, qui offre toute la souplesse du modèle à base de particules, permet de formuler des équations d'état à partir de quantités continues. Le modèle SPH est donc plus proche de la nature continue du milieu qu'il représente conduisant à des simulations de meilleure qualité. Desbrun [Desbrun 1997] utilise ce modèle pour simuler des corps hautement déformables.

2.2 Mécanique des milieux continus

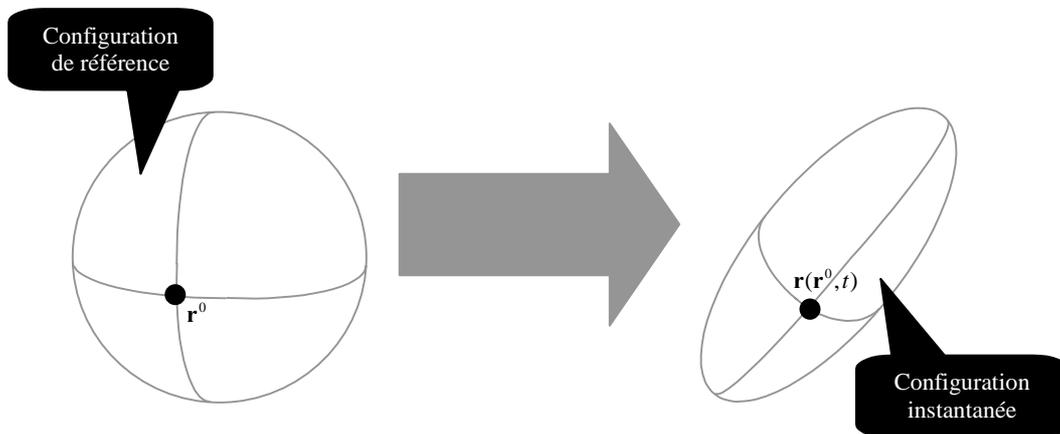


Figure 23 Représentation des configurations de référence et instantanée d'un milieu déformable.

Cette deuxième section recense les méthodes qui s'appuient sur l'hypothèse de continuité de la matière constituant le corps déformable. Cette fois-ci le corps n'est plus représenté par un ensemble discret de particules $(\mathbf{x}^i(t))_{1 \leq i \leq n}$. On définit une application continue \mathbf{r} caractérisant la forme instantanée de l'objet. En fait, le terme $\mathbf{r}(\mathbf{r}^0, t)$ correspond à la position à l'instant t d'une particule identifiée par sa position \mathbf{r}^0 dans une configuration de référence (Figure 23).

L'évolution du corps déformable est alors régie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu(\mathbf{r}^0, t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}^0, t) \right) + \gamma(\mathbf{r}^0, t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{r}^0, t) + \frac{\delta \varepsilon}{\delta \mathbf{r}}(\mathbf{r}^0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(\mathbf{r}^0, t), t) \quad (3.7)$$

$\mu(\mathbf{r}^0, t)$ est la densité massique du corps déformable dans la configuration de référence, γ un coefficient d'amortissement, $\varepsilon(\mathbf{r}^0, t)$ une énergie potentielle élastique responsable des efforts de cohésion interne et $\mathbf{f}(\mathbf{r}(\mathbf{r}^0, t), t)$ le vecteur résultant des efforts extérieurs.

2.2.1 Modèle de Terzopoulos

Terzopoulos *et al.* [Terzopoulos 1987] choisissent une formulation proche de l'équation (3.7) pour décrire l'évolution d'un corps déformable.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu(\mathbf{a}, t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{a}, t) \right) + \gamma(\mathbf{a}, t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\mathbf{a}, t) + \frac{\delta \varepsilon}{\delta \mathbf{r}}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(\mathbf{a}, t), t) \quad (3.8)$$

Dans leur modèle, le paramètre \mathbf{a} de l'équation (3.8) ne représente pas obligatoirement la position dans l'espace de la particule pour une configuration de référence. En l'occurrence, ils considèrent des objets déformables définis à partir de courbes, surfaces ou volumes paramétriques. Ce choix est motivé par la volonté de pouvoir animer des objets issus d'une modélisation géométrique à base de surfaces de Bézier ou de surfaces NURBS. Ainsi le paramètre \mathbf{a} correspond à l'indice paramétrique sur une courbe, surface ou volume identifiant une particule. Sous ces conditions, le paramètre \mathbf{a} n'est pas rattaché à une grandeur physique. Afin de caractériser le changement de forme de l'objet, ils choisissent d'utiliser le **tenseur métrique** $G(\mathbf{a}, t)$.

$$G(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}, t)^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}, t) \quad G^0(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a})^T \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a}) \quad (3.9)$$

Ce tenseur permet de mesurer la dilatation de deux fibres matérielles à l'instant t autour de la particule identifiée par le paramètre \mathbf{a} , en fonction de deux directions paramétriques (Figure 24).

Intuitivement, on peut rapprocher l'expression du tenseur métrique $G(\mathbf{a}, t)$ avec celle du tenseur de Cauchy-Green $\mathcal{C}(\mathbf{r}^0, t)$ de la théorie de l'élasticité (le lecteur trouvera la définition du tenseur de Cauchy-Green dans le chapitre consacré à l'élasticité non linéaire continue). Mais dans la mesure où le paramètre \mathbf{a} ne correspond pas systématiquement à une position de l'espace, le tenseur métrique est dépourvu de toute grandeur physique.

La déformation locale instantanée du corps autour d'une particule identifiée par \mathbf{a} est alors obtenue par la différence des tenseurs métriques $G(\mathbf{a}, t)$ et $G^0(\mathbf{a})$ correspondant respectivement à la configuration instantanée et à la configuration de référence. L'énergie totale de déformation est déduite par sommation :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} \|G(\mathbf{a}, t) - G^0(\mathbf{a})\|_{\alpha}^2 d\mathbf{a} \quad (3.10)$$

Comme les tenseurs métriques ne correspondent pas à des grandeurs physiques, les coefficients de la norme matricielle $\|\cdot\|_{\alpha}$ ne peuvent être identifiés à des quantités caractéristiques du matériau et doivent être par conséquent fixés de manière empirique.

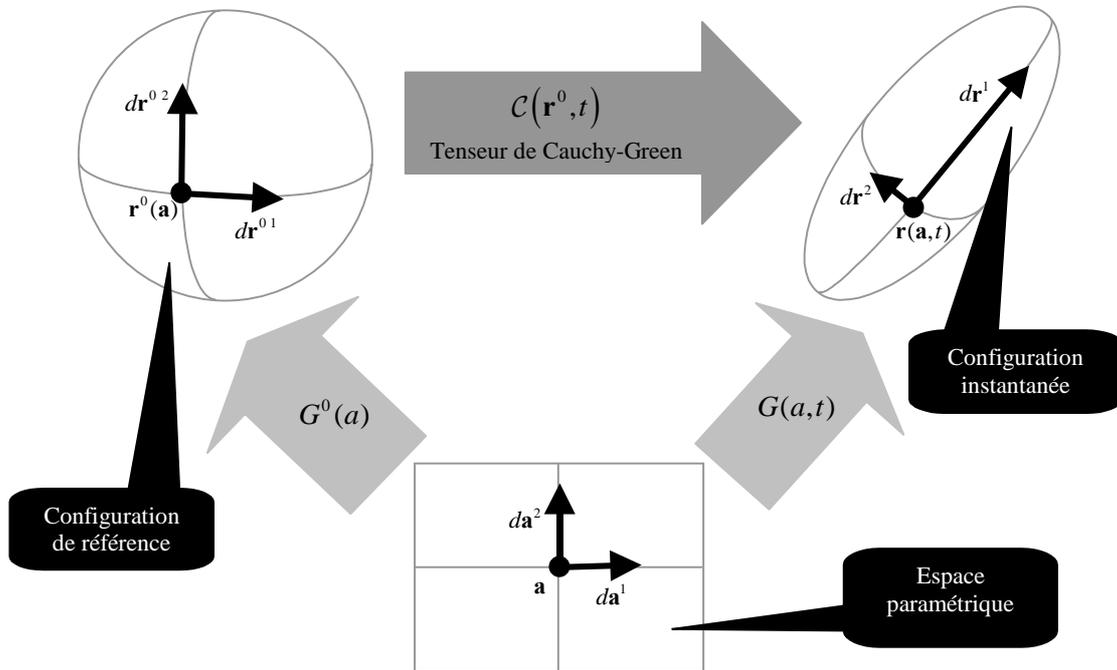


Figure 24 Illustration du tenseur métrique, comparaison avec le tenseur de dilatation de Cauchy-Green.

Au vu de l'expression complexe des équations à résoudre, Terzopoulos procède à plusieurs simplifications. Il effectue une troncature dans l'expression de la variation $\delta\varepsilon / \delta\mathbf{r}$ de l'énergie de déformation pour ne conserver que les termes d'ordre 2. Puis, s'appuyant sur une grille discrète régulière, il débouche sur le système différentiel suivant :

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{r}}}{\partial t^2} + \mathbf{D} \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial t} + \mathbf{K}(\underline{\mathbf{r}}) \underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (3.11)$$

La matrice \mathbf{M} est la **matrice des masses** (i.e. mass matrix), la matrice \mathbf{D} est la **matrice d'amortissement** (i.e. damping matrix) et la matrice $\mathbf{K}(\underline{\mathbf{r}})$ est la **matrice des raideurs** (i.e. stiffness matrix). Enfin, les vecteurs $\underline{\mathbf{r}}$ et $\underline{\mathbf{f}}$ correspondent respectivement aux valeurs des fonction \mathbf{r} et \mathbf{f} , échantillonnées aux points de la grille régulière. Il substitue alors l'ensemble des dérivées partielles par des différences finies. Bien qu'il considère des équations régissant le mouvement d'un milieu continu, Terzopoulos a recours à une discrétisation du milieu en une grille régulière pour la résolution de ces équations : résolution qui demeure coûteuse car elle nécessite à chaque itération l'inversion de la matrice des raideurs $\mathbf{K}(\underline{\mathbf{r}})$.

En 1988, Terzopoulos et Fleischer [Terzopoulos 1988] proposent une modification du modèle initial en décomposant le mouvement d'un corps déformable en un mouvement rigide (translation et rotation) et une déformation. Ainsi, en considérant de petits déformations, il suppose la matrice des raideurs \mathbf{K} constante, accélérant ainsi les temps de calcul des animations.

2.2.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode d'analyse numérique pour la recherche de solutions approchées d'équations d'évolution. Les équations d'évolution englobent à la fois les équations différentielles ordinaires (EDO) ainsi que les équations aux dérivées partielles (EDP). Cette méthode très populaire dans de nombreux domaines comme la mécanique, la biochimie mais aussi l'économie a fait l'objet de nombreux ouvrages dont ceux de Zienkiewicz [Zienkiewicz 1977], de Bathe [Bathe 1982], de Hughes [Hughes 1987]. Je conseille aussi au lecteur le cours très didactique de Garrigues [Garrigues 2001].

Je détaille le déroulement de la méthode des éléments finis pour le problème d'évolution suivant :

$$\text{Trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} A(u(x)) = f(x) & \forall x \in \Omega \quad (\text{problème d'évolution}) \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \quad (\text{conditions aux limites}) \end{cases} \quad (3.12)$$

A est un opérateur différentiel.

Le but de la méthode est de déterminer une solution approchée $\tilde{u}(x)$ de l'équation (3.12), définie par morceaux sur des sous-domaines Ω_i de l'ensemble Ω . Chaque restriction $\tilde{u}|_{\Omega_i}(x)$ de la solution approchée $\tilde{u}(x)$ au sous-domaine Ω_i est en fait un polynôme interpolant les valeurs de la solution en des points caractéristiques du sous-domaine. De façon plus précise, la méthode des éléments finis se décompose en plusieurs étapes :

- (1) Le **maillage** consiste à découper le domaine Ω en sous-domaines Ω_i appelés **mailles**. Au sein de chaque maille, on choisit un ensemble de **nœuds** correspondant aux points d'échantillonnage de la solution approchée de l'équation (3.12) et d'une fonction d'interpolation permettant d'exprimer les valeurs de la solution approchée en tout point de la maille Ω_i . Une maille dotée à la fois de ses nœuds et de sa fonction d'interpolation est appelée **élément**.
- (2) La **formulation variationnelle** consiste à transformer le problème d'évolution (3.12) en un problème intégral de la forme :

$$\text{Trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int A(u(x))\psi(x)dx = \int f(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \quad (3.13)$$

En exploitant l'intégration par parties (ou la formule de Green-Stokes en dimension plus élevée), on peut procéder à des simplifications visant à diminuer l'ordre de dérivation de la solution du problème initial.

- (3) La **discrétisation** permet, en choisissant un ensemble fini de n fonctions ψ particulières, de générer un nombre fini de n équations linéaires dont les inconnues sont les valeurs de la solution approchée et de ses dérivées successives estimées en chaque nœud du maillage.

La méthode des éléments finis, réputée pour être coûteuse en temps de calculs, a été utilisée en synthèse d'images dans sa forme la plus simple. Les éléments considérés sont des tétraèdres, privilégiés pour la forme triangulaire de ses cotés qui constitue une forme de base pour la

définition géométrique des surfaces en synthèse d'images. Les nœuds sont au nombre de 4 par élément, coïncidant avec les sommets des tétraèdres. Ainsi, puisque des tétraèdres voisins partagent les mêmes nœuds, la méthode garantit la continuité de la solution entre deux éléments. Enfin, la fonction d'interpolation se réduit à sa plus simple expression, c'est-à-dire une fonction linéaire. Ce modèle particulier d'élément est appelé **élément de type P1**.

Si l'on considère l'équation (3.7) qui régit le mouvement d'un milieu continu déformable en utilisant comme inconnue le déplacement $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}^0$ subi par la particule plutôt que sa position instantanée $\mathbf{r}(t)$, la méthode des éléments finis de type P1 donne le système différentiel suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.14)$$

Le système différentiel (3.14) est très similaire au système (3.11) obtenu par l'utilisation des différences finies dans l'approche de Terzopoulos. Pour des raisons de performance, on suppose dans la plupart des cas que la matrice de raideur est constante. Cette hypothèse, qui signifie que les efforts élastiques sont proportionnels aux déplacements, me place dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. L'équation (3.14) n'est alors valide que pour des petits déplacements restreignant ainsi le champ d'application de la méthode des éléments finis.

Parmi les premiers travaux utilisant la méthode des éléments finis, on peut citer celui de Gourret et Thalmann [Gourret 1989] dans lequel ils exploitent cette méthode pour simuler les déformations de la peau d'une main serrant une balle. Même en négligeant la dynamique pour ne résoudre que des problèmes statiques successifs, les temps de calculs demeurent très importants. Collier *et al* [Collier 1991] ainsi que Eischen *et al* [Eischen 1996] s'inspirent des méthodes de simulation des membranes pour mettre au point un modèleur de textiles tissés pour en étudier le drapé. Dans ce cas de figure aussi, la méthode des éléments finis se révèle lourde et donc peu adaptée à des applications temps réel.

Pour pallier aux problèmes de temps de calcul, Bro-Nielsen et Cotin [Bro-Nielsen 1996] proposent une méthode dite de condensation qui consiste à traiter les nœuds de la surface et ceux de l'intérieur séparément. En considérant que seul le déplacement des nœuds de la surface est visuellement pertinent, ils diminuent drastiquement le nombre de nœuds à animer. Pour les besoins de sa thèse, Cotin [Cotin 1997] propose une autre démarche d'optimisation qui repose sur la propriété de superposition des efforts en élasticité linéaire. Partant de l'idée que pour une déformation double l'intensité des efforts sera double, il pré-calcule les efforts d'élasticité interne pour un élément de référence unitaire. Les efforts à appliquer à un élément de la configuration instantanée sont obtenus par homothétie, autorisant des applications temps réel en simulation chirurgicale. Mais tous les modèles précédents reposent sur l'invariance de la matrice des raideurs \mathbf{K} , restreignant le champ d'application de ces méthodes aux petits déplacements. Plus récemment, Picinbono [Picinbono 2001] propose une utilisation de la méthode des éléments finis dans un contexte temps réel en utilisant une énergie élastique non linéaire en s'appuyant sur le modèle de St Venant-Kirchhoff. La non-linéarité de la déformation vis-à-vis du déplacement engendre une baisse significative de la performance, incompatible avec leur optique temps-réel. Picinbono utilise en fait un modèle adaptatif lui permettant de basculer entre une représentation linéaire ou non-linéaire de la déformation en fonction de

l'ordre de grandeur du déplacement. Dans la mesure où le contexte applicatif consiste en des manipulations ponctuelles d'un organe virtuel inerte, le modèle adaptatif se révèle tout à fait efficace.

2.2.3 Modèle « dynamique modale »

La démarche de Pentland et Williams [Pentland 1989] qualifiée de dynamique modale est en fait une stratégie de simplification des équations (3.14) issues de la méthode des éléments finis. Ils supposent que la matrice d'amortissement est une combinaison linéaire de la matrice des masses et de la matrice des raideurs conformément au modèle de Raleigh (i.e. $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$). Ils déterminent alors une base de vecteurs propres $(\Phi^i)_{1 \leq i \leq n}$ \mathbf{M} -orthonormale de la matrice $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. On a alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Phi^i &= \omega_i^2 \mathbf{M}\Phi^i \quad \text{avec } \omega_i^2 \text{ valeur propre de } \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \Phi^T \mathbf{M} \Phi &= \mathbf{I} \quad \text{où } \Phi = (\Phi^1 \quad \dots \quad \Phi^n) \end{aligned} \quad (3.15)$$

De l'équation (3.15), on déduit l'égalité suivante :

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Omega^2 \quad \text{avec } \Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.16)$$

Sous ces conditions, le système différentiel (3.14) admet une nouvelle expression.

$$\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{u}} + \Omega^2 \bar{\mathbf{u}} = \Phi^T \mathbf{f} \quad \text{avec } \mathbf{u} = \Phi \bar{\mathbf{u}} \quad (3.17)$$

où la matrice $\bar{\mathbf{D}}$ est diagonale. Ainsi si l'on pose $\bar{\mathbf{f}} = \Phi^T \mathbf{f}$, le système diagonal (3.17) est équivalent aux n équations linéaires indépendantes suivantes :

$$\ddot{\bar{u}}_i + \bar{D}_{ii} \dot{\bar{u}}_i + \omega_i^2 \bar{u}_i = \bar{f}_i \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.18)$$

En changeant de base de représentation, le problème initial formulé en termes de déplacement s'interprète grâce à l'équation (3.18) comme une superposition de modes vibratoires indépendants. Un premier avantage de ce type d'approche réside dans la nature fortement parallèle du nouveau problème. Les équations étant indépendantes ; elles peuvent être résolues simultanément au sein d'une architecture parallèle. L'autre avantage réside dans la possibilité de supprimer certains modes vibratoires sans altérer le comportement global du corps déformable. Puisque la fréquence du mode vibratoire est proportionnelle aux valeurs propres, les équations associées à de grandes valeurs propres peuvent être alors négligées.

2.2.4 Modèle « dynamique globale »

Cette approche proposée par Witkin et Welch [Witkin 1990] s'appuie sur les équations de Lagrange pour décrire le mouvement d'un corps déformable.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_i} = Q_i \quad (3.19)$$

Ils choisissent délibérément de ne considérer que des déformations équivalentes à des transformations linéaires. Ainsi, la position instantanée d'une particule de l'objet déformable est déduite de sa position \mathbf{p} dans la configuration de référence et de la matrice de transformation \mathbf{R}

$$x_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} p_j + R_{i4} \quad (3.20)$$

On considère alors les coefficients de la matrice \mathbf{R} comme étant les nouvelles inconnues de Lagrange du système. Ce changement d'inconnues permet de déboucher sur l'expression d'un nouveau système différentiel constitué de 16 équations seulement.

$$\ddot{\mathbf{R}} \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{Q}} \quad \text{avec} \quad \tilde{Q}_{ij} = \sum_{k=1}^n f_k \frac{\partial x_k}{\partial R_{ij}} \quad (3.21)$$

En plus de diminuer considérablement le nombre des inconnues, cette méthode en animant le corps dans sa globalité fait disparaître tous les phénomènes oscillatoires permettant ainsi d'utiliser des pas de temps relativement élevés lors de l'intégration numérique. Malheureusement, cette méthode se restreint aux transformations linéaires. Deux ans plus tard, Baraff et Witkin [Baraff 1992] proposent une extension de la démarche aux transformations polynomiales mais se limitent au cas des polynômes du second degré.

2.3 Synthèse

Modèle	Structuré	Mécanique des Milieux Continus	Préservation Continuité Matérielle	Multi Echelle
Masses-Ressorts	OUI	NON	NON	OUI
Particules	NON	NON	NON	OUI
SPH	NON	OUI	OUI	OUI
Modèle Terzopoulos	OUI	OUI	NON	OUI
Eléments finis	OUI	OUI	NON	NON
Dynamique modale	OUI	OUI	NON	OUI
Dynamique globale	OUI	OUI	OUI	NON
Variétés Splines Dynamiques	OUI	OUI	OUI	OUI

Tableau 1 Approches classiques pour l'animation dynamique de corps déformables

En guise de synthèse, je rassemble les approches précédemment citées au sein du tableau 1. Le modèle qualifié de « variétés splines dynamiques » correspond au modèle alternatif et innovant

que je propose. Les propriétés de ce modèle, mentionnées dans les colonnes du tableau, sont développées dans la section suivante.

3 Modèle « Variétés Splines Dynamiques »

Tout comme les modèles présentés précédemment, le modèle que je propose se plie à la contrainte que constitue la réduction du nombre de paramètres caractéristiques. J'ai ainsi opté pour une modélisation qualifiée de **modélisation spline** des objets déformables continus. Pour préciser cette notion de modélisation spline, j'emprunterai cette remarque formulée par Carole Blanc dans sa thèse [Blanc 1994] :

« Les objets splines sont des modèles mathématiques qui permettent d'associer une représentation paramétrique continue à un ensemble fini de points de l'espace »

La configuration d'un corps déformable est entièrement déterminée à partir d'un réseau fini de points caractéristiques de l'espace \mathbb{R}^3 , appelés **points de contrôle**. La position de toute particule constitutive de l'objet déformable est alors obtenue par combinaison linéaire des positions des points de contrôle, pondérée par des **fonctions de mélange**. Ce choix de modélisation a de nombreux avantages dont :

- La garantie de la finitude des degrés de liberté correspondant aux coordonnées des points de contrôle. En effet, les positions de toutes les particules de l'objet spline sont entièrement conditionnées par les positions des points de contrôle.
- La souplesse et la richesse de formes qu'offre le modèle spline. En effet, l'utilisateur responsable de la modélisation dispose d'un outil mathématique puissant lui permettant de réaliser des objets de synthèse aux formes très variées.
- La popularité du modèle spline n'est plus à prouver. Il s'est largement imposé avec l'épanouissement des techniques de conception et de fabrication assistées par ordinateur. Le modèle spline est donc un élément incontournable dans la culture de l'informatique graphique au vu du nombre important de logiciels de modélisation qui l'utilisent. Cet état de fait me donne la garantie de pouvoir concevoir aisément les objets que je souhaite par la suite animer.

De par l'identification paramétrique des particules, ce modèle peut être comparé à celui proposé par Terzopoulos. En effet, le modèle que je propose englobe à la fois les définitions de courbes, surfaces et volumes splines. Mais contrairement au modèle de Terzopoulos, j'attache une grande importance à la nature continue de l'objet déformable. Je considère une répartition continue de la matière en accord avec la continuité du modèle géométrique. Dans ce modèle, la masse n'est donc pas répartie parmi un ensemble discret de points matériels caractéristiques, le distinguant des modèles masses-ressorts ou à base de particules.

La particularité de la définition géométrique d'une variété spline (combinaison linéaire de points de contrôle pondérée par les valeurs des fonctions de mélange) me permet de procéder à de nombreuses simplifications formelles des équations du mouvement. Ainsi, le système différentiel issu des simplifications, demeure équivalent aux équations de départ tout en exhibant des propriétés structurelles intéressantes (matrice des masses composée de trois blocs identiques constants par exemple). Il est important de mentionner que je n'ai recours à aucune

étape de discrétisation supplémentaire. Cette démarche de conservation des équations continues du mouvement est similaire à l'approche utilisée pour le modèle SPH : des équations d'état continues sont plus proches de la nature du milieu qu'elles simulent et permettent donc de calculer une solution plus proche de la solution exacte.

Enfin la généralité de modèle spline permet d'envisager des formes alternatives pour la génération du mouvement. Au lieu d'animer un objet complexe par l'intermédiaire de ses paramètres caractéristiques souvent trop nombreux, on peut considérer son évolution de manière globale en le supposant plongé dans un volume paramétrique défini à partir d'un réseau régulier de points de contrôle. Cette démarche est assimilable à la méthode des « Free Form Deformations » [Sederberg 1986] [Coquillart 1990] [Coquillart 1991] où chaque point de l'objet à déformer est considéré à paramètres constants au sein d'un volume englobant. Contrairement aux approches déjà proposées, l'innovation de mon approche repose sur le fait que je considère les points de contrôle du volume englobant comme les nouvelles inconnues des équations du mouvement. Cette démarche peut être perçue comme une généralisation du modèle de « dynamique globale » proposé par Witkin et Welch dans la mesure où il ne se restreint pas à des transformations linéaires ou quadratiques. Cette démarche est détaillée dans le chapitre consacré à la réduction de paramétrage.



VARIETES SPLINES DE DIMENSION D

Pour les besoins de sa thèse, Jean-Michel Nourrit a proposé un modèle de fils définis à partir de courbes splines matérielles. Ce choix, couplé avec une description du mouvement à l'aide des équations de Lagrange, révèle de nombreux avantages dont la garantie de la continuité de la définition géométrique du système mais aussi de sa répartition massique. Ces premiers résultats satisfaisants nous ont encouragé à poursuivre dans cette voie en adoptant une démarche dictée par la volonté du groupe d'animation d'aboutir à la réalisation d'une plate-forme d'animation générique.

Au sein de cette partie, je commence par proposer une expression générale d'une courbe spline, indépendante de la nature de ses fonctions de mélange, généralisant ainsi le travail effectué par Jean-Michel Nourrit.

Dans un deuxième temps, au vu de la similarité des formulations splines associées à des courbes, des surfaces et des volumes, je propose une deuxième abstraction dans l'étape de modélisation en donnant une nouvelle formulation indépendante à la fois des fonctions de mélange et désormais de la dimension intrinsèque de l'objet. Ainsi, les courbes, surfaces et volumes splines se

trouvent être rassemblés dans un cadre théorique unifié que je choisis de qualifier de variété spline de dimension d .

L'implantation informatique du concept de variétés splines se veut tout aussi générique. Je détaille comment, en exploitant les notions de polymorphisme et de généralité de la conception objet, j'aboutis à une structure informatique des variétés splines fidèle à leur définition mathématique.

Le point fort de cette modélisation réside dans notre capacité à conserver une description continue du milieu sans avoir recours à une étape de discrétisation supplémentaire. Une des lacunes principales du modèle initial proposé par Jean-Michel résidait dans l'expression de efforts élastiques internes qui auparavant étaient modélisés par des ressorts disposés dans un réseau discret de points caractéristiques de la variété. Je propose alors une première formalisation des efforts issues d'une énergie continue de déformation se limitant pour le moment au cas des courbes.

Enfin, j'exploite la richesse du modèle de variétés splines pour proposer une méthode de réduction de paramétrage que j'applique à la simulation de textiles tricotés.

GEOMETRIE DES VARIETES SPLINES

1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de détailler la démarche que j'ai entreprise pour bâtir le modèle géométrique de variété spline. Je commence par donner une expression générique d'une courbe spline, indépendante de la nature de ses fonctions de mélange. Cette expression garantit dans tous les cas de figures la propriété de localité par l'introduction du concept de segments splines. Puis, au vu des similarités existantes dans les expressions unidimensionnelle, bidimensionnelle et tridimensionnelle des objets splines, je propose un modèle novateur, considéré comme l'unification des représentations linéiques, surfaciques et volumiques. Je termine en présentant le modèle informatique codant une variété spline qui lui aussi reflète cette volonté d'unification de la représentation. Le modèle de variété spline dans sa dimension géométrique, cinématique et dynamique a fait l'objet de publications dont une dans la revue internationale *The Visual Computer* [Remion 2001].

2 Courbe spline

Afin de préciser ce que j'entend par modélisation spline, j'emprunterai à Carole Blanc la définition d'une courbe spline qu'elle proposa dans sa thèse de doctorat [Blanc 1994] :

Soient un ensemble de points $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^3$ et des fonctions $b_i : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $1 \leq i \leq n$. On appelle **courbe spline** l'ensemble continu C des points dont la position est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{p}(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i(\omega) \mathbf{p}^i \quad \omega \in [0,1] \quad (1.1)$$

Les points $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^3$ sont appelés les **points de contrôle** et l'ensemble de ces points, noté \mathfrak{R} , est appelé **réseau de contrôle** de la courbe spline. Les fonctions b_i correspondent aux **fonctions de mélange** (i.e. **d'influence**) associées respectivement aux points $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^3$ (Figure 25).

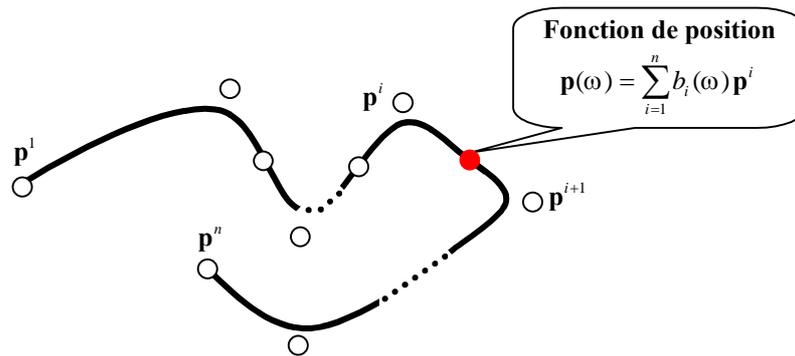


Figure 25 Courbe spline définie à partir de n points de contrôle.

Il me semble important de signaler que la définition d'une courbe spline (1.1) est entièrement indépendante de la nature de ses fonctions de mélange. Cette définition fournit une expression mathématique unique, englobant toutes les familles de courbes splines. Ainsi les courbes interpolantes telles que les courbes d'Hermite [Barnhill 1974], de Catmull-Rom [Catmull 1974], TCB [Kochanek 1984] ou bien les courbes approximantes telles que les courbes de Bézier [Bézier 1966, 1977] [Farin 1990], les B-splines [Riesenfeld 1973] [Foley 1989], les β -splines [Barsky 1981, 1983], les NURBS [Piegl 1991] sont réunies sous une même formulation et autorisent une certaine abstraction dans le processus de modélisation spline vis-à-vis de la nature des fonctions de mélange.

Cependant, la formulation proposée en (1.1) met en évidence une forte dépendance entre les différents points de contrôle \mathbf{p}^i , suggérant que les n points de contrôle interviennent dans le calcul de la position $\mathbf{p}(\omega)$. Je choisis alors d'adopter une définition alternative pour une courbe spline. En fait, à partir d'un réseau de contrôle commun \mathfrak{R} , je construis plusieurs courbes splines contiguës que je nommerai par la suite **segments splines**. Le terme de courbe spline désigne la réunion de ces segments contigus. Cette idée (illustrée par la Figure 26) peut être mathématiquement formalisée de la manière suivante :

Soient un ensemble de points $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^3$ avec $1 \leq i \leq n$, un nombre ns de segments et des fonctions $b_i^j : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq ns$. On appelle **segments splines** les ns ensembles continus C^j des points dont la position est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{p}^j(\omega) = \sum_{i=1}^n b_i^j(\omega) \mathbf{p}^i \quad 1 \leq j \leq ns, \omega \in [0,1] \quad (1.2)$$

L'expression de la courbe spline C est déduite de la relation (1.3) :

$$C = \bigcup_{j=1}^{ns} C^j \quad (1.3)$$

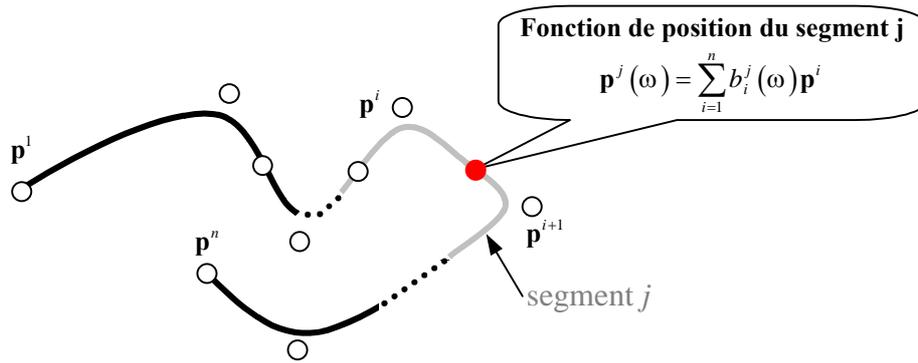


Figure 26 Courbe spline composée de ns segments.

Ainsi, un point de la courbe spline C est identifié par son numéro de segment j et son indice paramétrique ω dans ce segment. On définit alors une **fonction de position globale** pour l'ensemble des points de la courbe spline.

$$\mathbf{p} : \begin{cases} \{1, \dots, ns\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (j, \omega) \mapsto \mathbf{p}(j, \omega) = \mathbf{p}^j(\omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

L'introduction de cette notion de segments splines a plusieurs conséquences importantes. En l'occurrence la définition (1.2) permet d'imposer la propriété de localité à une courbe spline et ce, quelque soit la nature des fonctions de mélange. Cette propriété de localité garantit que l'évaluation de la position $\mathbf{p}(j, \omega)$ ne dépend que d'un petit nombre de points de contrôle. Géométriquement, le déplacement d'un point de contrôle n'affecte qu'une partie de la courbe. De façon pratique, cette propriété est réalisée en imposant que, pour un segment j dépendant d'un sous-ensemble \mathfrak{R}^j du réseau de contrôle \mathfrak{R} , les fonctions de mélange b_i^j soient identiquement nulles en dehors du sous ensemble \mathfrak{R}^j . La Figure 27 illustre cette propriété de localité en montrant son effet sur l'allure générale d'une courbe spline.

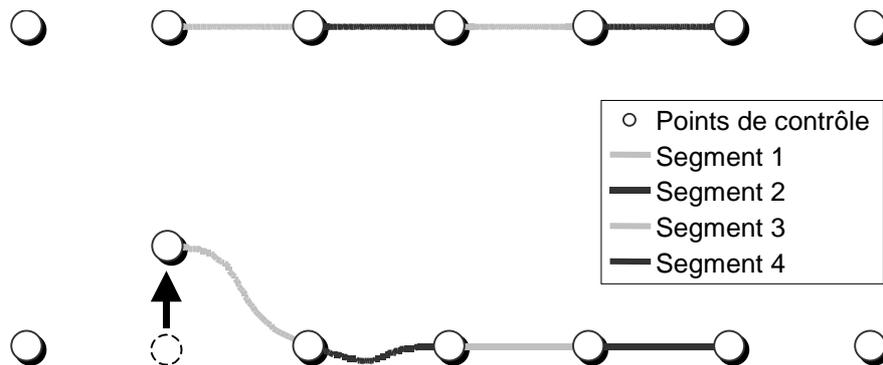


Figure 27 Illustration de la localité.

Afin d'illustrer le modèle de « segments splines » que je propose, je donne quelques exemples de courbes splines classiques exprimées dans mon formalisme. Mais auparavant, je rappelle plusieurs définitions relatives aux propriétés des courbes splines.

Une courbe spline vérifie la **propriété de normalité** si ses fonctions de mélange b_i^j vérifient l'égalité suivante :

$$\forall j, 1 \leq j \leq ns : \sum_{i=1}^n b_i^j(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in [0,1] \quad (1.5)$$

Les courbes splines vérifiant l'égalité (1.5) sont alors qualifiées de **courbes normales**.

Une courbe spline est une **courbe d'interpolation** des points \mathbf{p}^k ($1 < k < n$) si elle passe par l'ensemble des points de contrôle \mathbf{p}^k ($1 < k < n$).

Les courbes splines qui ne sont pas des courbes d'interpolation sont des **courbes d'approximation**.

2.1 Courbe d'Hermite

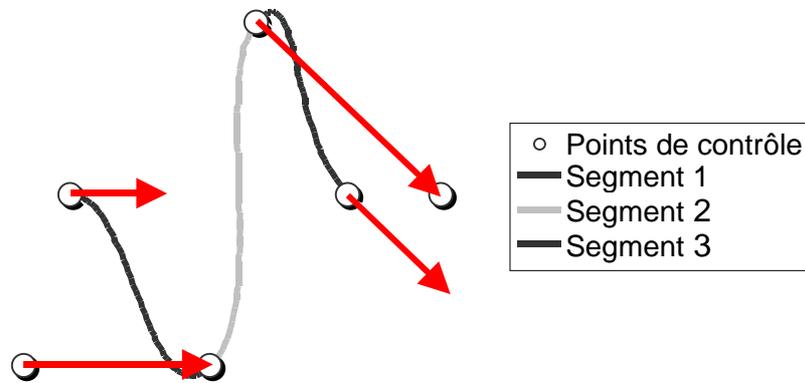


Figure 28 Courbe d'Hermite composée de 3 segments, 6 points de contrôle.

Les fonctions de mélange s'expriment de la façon suivante :

$$b_i^j(\omega) = \begin{cases} H_{i-j}(\omega) & \text{si } j \leq i \leq j+3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

où les fonctions H_i sont les polynômes d'Hermite définis comme:

$$\begin{aligned} H_1(\omega) &= -\omega + 2\omega^2 - \omega^3 \\ H_2(\omega) &= 1 - 2\omega^2 + \omega^3 \\ H_3(\omega) &= \omega + \omega^2 - \omega^3 \\ H_4(\omega) &= -\omega^2 + \omega^3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Les courbes d'Hermite sont des courbes normales, d'interpolation des points \mathbf{p}^k ($1 < k < n$). Et les courbes d'Hermite sont des courbes de continuité C^1 . En effet, deux segments splines d'Hermite j et $j+1$ coïncident au point $\mathbf{p}(j,1) = \mathbf{p}(j+1,0) = \mathbf{p}^{j+2}$. De plus, la pente à droite et à gauche au point \mathbf{p}^{j+2} est égale à la moitié du vecteur d'extrémités \mathbf{p}^{j+1} et \mathbf{p}^{j+3} (Figure 28).

2.2 Courbe de Catmull-Rom

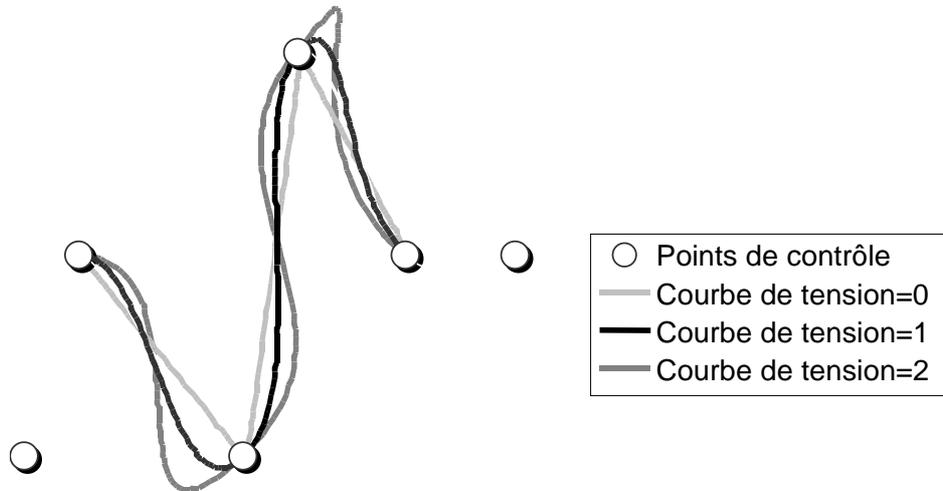


Figure 29 Courbes de Catmull-Rom composées de 3 segments, 6 points de contrôle pour des tensions égales à 0, 1 et 2.

Les fonctions de mélange d'une courbe de Catmull-Rom s'expriment de la façon suivante :

$$b_i^j(\omega) = \begin{cases} C_{i-j}(\omega) & \text{si } j \leq i \leq j+3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.8)$$

où les fonctions C_i sont les polynômes définis comme:

$$\begin{aligned} C_1(\omega) &= \rho(-\omega + 2\omega^2 - \omega^3) \\ C_2(\omega) &= 1 + (\rho - 3)\omega^2 + (2 - \rho)\omega^3 \\ C_3(\omega) &= \rho\omega + (3 - 2\rho)\omega^2 + (\rho - 2)\omega^3 \\ C_4(\omega) &= \rho(-\omega^2 + \omega^3) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le paramètre ρ est un paramètre de tension qui influe sur la norme de la pente autour de chaque point de contrôle. Les courbes de Catmull-Rom sont des courbes normales, d'interpolation des points \mathbf{p}^k ($1 < k < n$). Et les courbes de Catmull-Rom sont aussi des courbes de continuité C^1 , pour les mêmes raisons que les courbes d'Hermite. D'ailleurs, les courbes d'Hermite sont un cas particulier de courbes Catmull-Rom pour une tension unitaire (Figure 29).

2.3 Courbe de Kochanek (i.e. courbe TCB)

Les fonctions de mélange s'expriment de la façon suivante :

$$b_i^j(\omega) = \begin{cases} K_{i-j}(\omega) & \text{si } j \leq i \leq j+3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

où les fonctions K_i sont les polynômes définis comme:

$$\begin{aligned}
K_1(\omega) &= -k_1\omega^3 + 2k_1\omega^2 - k_1\omega \\
K_2(\omega) &= (2 + k_1 - k_3 - k_4)\omega^3 + (k_3 + 2(k_4 - k_1) - 3)\omega^2 + (k_4 - k_1)\omega + 1 \\
K_3(\omega) &= (k_4 + k_3 - k_2 - 2)\omega^3 + (k_2 - k_3 - 2k_4 + 3)\omega^2 + k_4\omega \\
K_4(\omega) &= k_2\omega^3 - k_2\omega^2
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } k_1 &= \frac{1}{2}(1 - \text{tension})(1 + \text{continuité})(1 + \text{bias}) \\
k_2 &= \frac{1}{2}(1 - \text{tension})(1 + \text{continuité})(1 - \text{bias}) \\
k_3 &= \frac{1}{2}(1 - \text{tension})(1 - \text{continuité})(1 + \text{bias}) \\
k_4 &= \frac{1}{2}(1 - \text{tension})(1 - \text{continuité})(1 - \text{bias})
\end{aligned}$$

Les courbes de Kochanek sont des courbes normales, d'interpolation des points \mathbf{p}^k ($1 < k < n$) de continuité C^1 .

2.4 Courbe de Bézier

Les fonctions de mélange d'une courbe de Bézier de degré 5 s'expriment de la façon suivante :

$$b_i^j(\omega) = \begin{cases} B_{i-4(j-1)+1}^5(\omega) & \text{si } 4(j-1)+1 \leq i \leq 4(j-1)+5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.12}$$

où les fonctions B_i^5 sont les polynômes de Bernstein définis comme:

$$B_i^5(\omega) = C_5^i(1-\omega)^{5-i}\omega^i \quad \text{où } C_5^i = \frac{5!}{(5-i)!i!} \tag{1.13}$$

Les courbes de Bézier de degré 5 sont des courbes normales, d'approximation mais interpolantes aux points \mathbf{p}^{5k} . Les courbes de Bézier sont de continuité C^0 seulement. On peut garantir une continuité C^1 autour d'un point \mathbf{p}^k , extrémité commune de deux segments splines de Bézier, s'il est milieu du segment $[\mathbf{p}^{k-1}, \mathbf{p}^{k+1}]$.

$$\mathbf{p}^k = \frac{\mathbf{p}^{k-1} + \mathbf{p}^{k+1}}{2} \tag{1.14}$$

3 Extension aux dimensions supérieures

3.1 Surface et volume spline

Le modèle spline est un formalisme mathématique intrinsèquement riche et puissant. Hormis sa capacité d'abstraction vis-à-vis des fonctions de mélange, la définition d'une courbe spline (1.2) est naturellement transposable aux cas des surfaces et des volumes splines.

Ainsi, si l'on considère un réseau bidimensionnel de points de contrôle \mathbf{p}^{i_1, i_2} associés à des fonctions de mélange de deux variables réelles ω_1 et ω_2 , on définit des sous-surfaces splines S^{j_1, j_2} communément appelées « patches » dont la position des points est donnée par l'équation (1.15) :

$$\mathbf{p}^{j_1, j_2}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} b_{i_1, i_2}^{j_1, j_2}(\omega_1, \omega_2) \mathbf{p}^{i_1, i_2} \quad (1.15)$$

$$1 \leq j_1 \leq ns_1, 1 \leq j_2 \leq ns_2, (\omega_1, \omega_2) \in [0, 1]^2$$

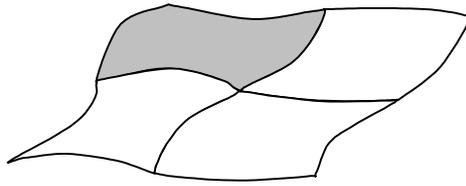


Figure 30 Surface spline composée de (2,2) patches.

Les patches S^{j_1, j_2} sont, en dimension 2, les éléments analogues aux segments C^j d'une courbe spline. De plus, du fait de l'accroissement de la dimension, la notion de succession de segments splines se transpose en une notion de juxtaposition de patches (Figure 30).

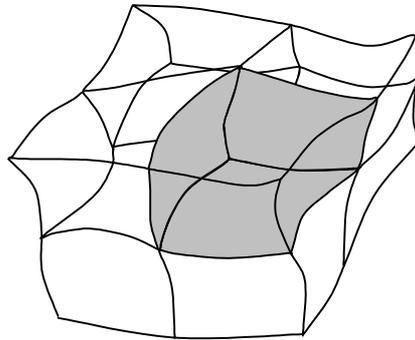


Figure 31 Volume spline composé de (2,2,2) patches.

L'expression mathématique d'un volume spline est déduite de la même démarche utilisée pour expliciter une surface spline et permet d'aboutir à la définition synthétisée par l'équation (1.16).

$$\mathbf{p}^{j_1, j_2, j_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1, i_2, i_3}^{j_1, j_2, j_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mathbf{p}^{i_1, i_2, i_3} \quad (1.16)$$

$$1 \leq j_1 \leq ns_1, 1 \leq j_2 \leq ns_2, 1 \leq j_3 \leq ns_3, (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in [0, 1]^3$$

On remarque une forte similarité entre les équations (1.2), (1.15) et (1.16) qui ne diffèrent que par la dimension intrinsèque de l'objet spline (courbe, surface ou volume) qui conditionne le système d'indexation et le nombre des sommes. Il est donc apparu pertinent de mettre en place une nouvelle expression de ces objets splines d'une part indépendante de la nature de leurs

fonctions de mélange mais aussi indépendante de leur dimension intrinsèque. De cette manière, je parlerai indifféremment de courbes, de surfaces et de volumes splines en utilisant une formulation mathématique unique. Pour rendre compte de cette unité d'expression, je nommerai désormais ces courbes, surfaces et volumes splines à l'aide du terme de **variété spline**. Le terme de variété, emprunté au vocabulaire de la géométrie différentielle [Berger 1987], désigne un ensemble de dimension d ayant certaines propriétés topologiques que je ne détaillerai pas dans ce document.

Afin de pouvoir expliciter l'expression mathématique unifiée d'une variété spline de dimension d , il me faut introduire la notion de **multi-indice**.

3.2 Multi-indice de dimension d

Un **multi-indice** est un d -uplet que l'on note de la façon suivante : $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$. Parmi ces multi-indices, on en distingue deux particuliers dont je ferai grand usage : le multi-indice **unité** noté $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ et le multi-indice **élément neutre** $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^d$. Je définis ici le **cardinal** d'un multi-indice de cette manière :

$$\forall \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d : \text{Card}(\mathbf{i}) = i_1 \times i_2 \times \dots \times i_d \quad (1.17)$$

On munit \mathbb{N}^d , l'ensemble des multi-indices, d'une relation d'ordre partiel \leq :

$$\forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{i} \leq \mathbf{j} \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, d\} : i_k \leq j_k \quad (1.18)$$

3.3 Variété spline de dimension d

En s'appuyant sur les notations introduites pour les multi-indices, on donne la définition d'une variété spline de dimension d , unification des expressions mathématiques (1.2), (1.15) et (1.16), indépendante de la nature des fonctions de mélange et de la dimension intrinsèque de l'objet spline.

Soient un ensemble de points $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^3$ avec $1 \leq i \leq \mathbf{n}$, $\mathbf{ns} \in \mathbb{N}^d$ le nombre de sous variétés et des fonctions de d variables réelles $b_i^j : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ avec $1 \leq i \leq \mathbf{n}$, $1 \leq j \leq \mathbf{ns}$. On appelle **sous variétés splines**, les variétés V^j dont la position des points est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{p}^j(\omega) = \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} b_i^j(\omega) \mathbf{p}^i \quad 1 \leq j \leq \mathbf{ns}, \omega \in [0, 1]^d \quad (1.19)$$

La **variété spline** V correspond à la réunion des sous variétés V^j :

$$V = \bigcup_{1 \leq j \leq \mathbf{ns}} V^j \quad (1.20)$$

Comme pour le cas des courbes splines, un point de la variété spline est identifié par son indice de sous-variété \mathbf{j} et son indice paramétrique ω . On définit alors une fonction de position globale de la variété spline V dont l'expression est donnée par l'équation (1.21) :

$$\mathbf{p} : \begin{cases} \mathbb{N}_{ns}^d \times [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{j}, \omega) \mapsto \mathbf{p}(\mathbf{j}, \omega) = \mathbf{p}^{\mathbf{j}}(\omega) \end{cases} \quad \text{où } \mathbb{N}_{ns}^d = \{ \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d : 1 \leq \mathbf{j} \leq ns \} \quad (1.21)$$

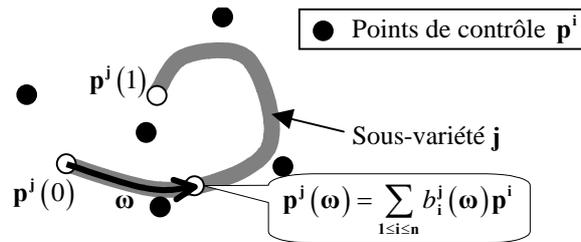


Figure 32 Variété spline de dimension 1.

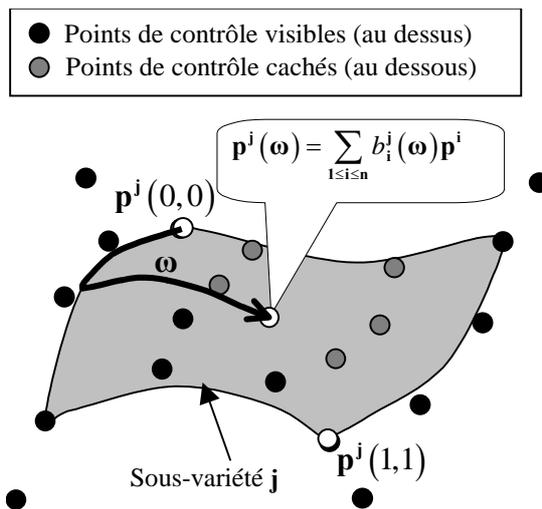


Figure 33 Variété spline de dimension 2.

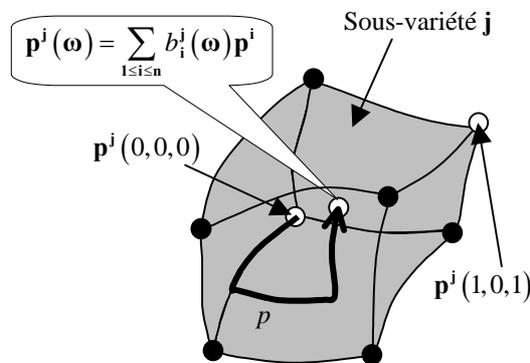


Figure 34 Variété spline de dimension 3.

Ce modèle géométrique de variété spline, générique d'une part vis-à-vis des fonctions de mélange mais aussi vis-à-vis de la dimension intrinsèque de l'objet, correspond au modèle mathématique que j'ai choisi pour représenter des corps déformables continus à degrés de liberté finis.

3.4 Coordonnées généralisées

Conformément au formalisme Lagrangien, une configuration géométrique cohérente d'une variété spline est caractérisée par un nombre fini de paramètres réels suffisants et indépendants. Ce n -uplet de réels, noté $\boldsymbol{\eta}$ est appelé vecteur des **coordonnées généralisées** de la variété spline. Les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{\eta}$ correspondent aux degrés de liberté du système. Pratiquement, les coordonnées généralisées d'une variété spline sont les coordonnées de ses \mathbf{n} points de contrôle. Dans le cadre d'une configuration étendue incluant le temps, le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ évolue donc dans un espace de configuration \mathbb{U} de dimension $3n+1$ où $n = \text{Card}(\mathbf{n})$.

Dans la mesure où les points de contrôle de la variété spline sont indexés par des multi-indices de \mathbb{N}^d , il me faut mettre en place une fonction de transcodage α_n permettant d'établir la relation entre un multi-indice \mathbf{i} et l'indice entier i correspondant aux coordonnées du point de contrôle \mathbf{i} dans le vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$. La fonction α_n est une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}_n^d = \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}\}$ vers l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ où $n = \text{Card}(\mathbf{n})$, \mathbf{n} correspondant au « nombre » de points de contrôle de la variété spline. L'expression de la fonction de transcodage α_n pour les dimensions 1, 2 et 3 est donnée par l'équation (1.22).

$$\alpha_n(\mathbf{i}) = \begin{cases} i_1 & \text{si } d = 1 \\ i_1 + (i_2 - 1)n_1 & \text{si } d = 2 \\ i_1 + (i_2 - 1)n_1 + (i_3 - 1)n_1n_2 & \text{si } d = 3 \end{cases} \quad (1.22)$$

Ainsi, les coordonnées des points de contrôle de la variété spline et les coordonnées du vecteur $\boldsymbol{\eta}$ sont liées par l'expression (1.23) :

$$\forall \mathbf{1} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n} : \eta_{\alpha_n(\mathbf{i})+(k-1)n} = p_k^i \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (1.23)$$

Le vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ est composé du temps puis successivement des coordonnées x , y et z des points de contrôle. De manière plus synthétique, on écrit :

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\underbrace{\eta_0}_{\text{temps}}, \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_n}_x, \underbrace{\eta_{n+1}, \dots, \eta_{2n}}_y, \underbrace{\eta_{2n+1}, \dots, \eta_{3n}}_z \right)^T \quad (1.24)$$

3.5 Fonction de positionnement

A partir de la relation (1.23) je suis en mesure d'exprimer aisément la **fonction de positionnement** qui, à une configuration géométrique donnée par le vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ et à un point de la variété repéré par son numéro de sous-variété \mathbf{j} et son indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$, donne la position de ce point dans l'espace \mathbb{R}^3 .

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{U} \times \mathbb{N}_{ns}^d \times [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \Phi(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad (1.25)$$

où $\Phi_k(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^j(\boldsymbol{\omega}) \eta_{\alpha_n(i)+(k-1)n} \quad 1 \leq k \leq 3$

Au vu de l'équation (1.25), il apparaît que la fonction de positionnement Φ est une application linéaire du vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$. On peut donc associer à la fonction Φ une représentation matricielle $\mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ dont les propriétés structurelles sont détaillées dans l'équation

$$\mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & \vdots & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Le terme $\mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega})$ correspond à une matrice ligne composée de l'ensemble des fonctions de mélange :

$$\mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) = \left(b_{\alpha_n^{-1}(1)}^j(\boldsymbol{\omega}) \cdots b_{\alpha_n^{-1}(n)}^j(\boldsymbol{\omega}) \right) \quad (1.27)$$

4 Codage informatique

Lorsque j'ai entrepris l'implantation informatique du modèle de variété spline, je voulais que le modèle informatique reflète cette idée d'unification présente dans le modèle mathématique, aussi bien vis-à-vis des fonctions de mélange que de la dimension intrinsèque de la variété. Ainsi, je fus naturellement amené à privilégier une méthode de programmation orientée objet afin de bénéficier des concepts de polymorphisme et de généricité.

En premier lieu, j'ai commencé par définir trois classes **Dimension** (Figure 35) présentant pour les dimensions 1, 2 et 3 des particularités fonctionnelles semblables :

- ❑ une classe nichée **E** codant un multi-indice d -dimensionnel. La classe **E** intervient dans la numérotation des sous-variétés V^j et des points de contrôle \mathbf{p}^i de la variété spline V .
- ❑ une classe nichée **R** codant un vecteur réel d -dimensionnel. La classe **R** est utilisée pour représenter l'indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$ identifiant une particule au sein d'une sous-variété V^j .
- ❑ une classe nichée **ParcoursE** codant un « parcourreur » de valeurs multi-indicielles. La classe **ParcoursE**, munie, entre autres, de méthodes d'incrémentement et de décrémentement, permet de balayer un ensemble de multi-indices apparaissant dans une somme pour l'évaluation d'une position $\mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ par exemple.

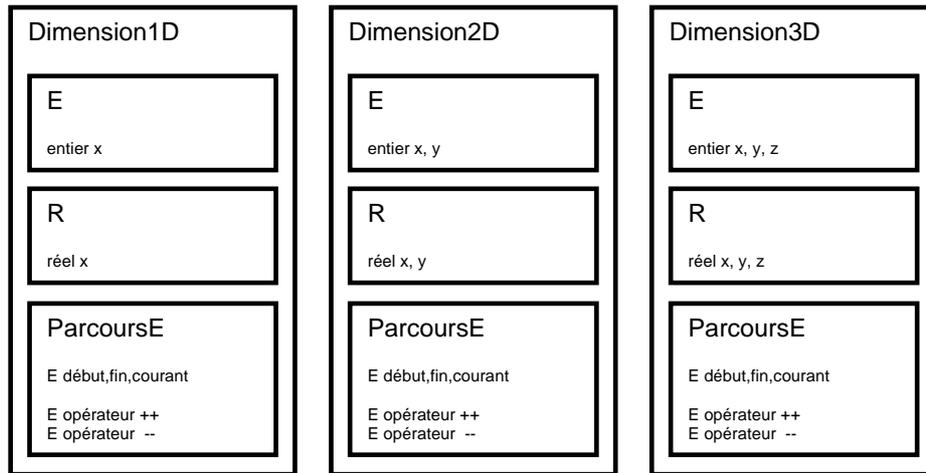


Figure 35 Représentation schématique des trois classes **Dimension**.

J'ai alors implémenté une classe abstraite **FonctionMelange** paramétrée par l'un de ces types **Dimension** codant une fonction de mélange générique. La définition de la classe **FonctionMelange** s'appuyant sur un patron de classe paramétré par un type **Dimension** garantit la généricité de l'expression au vu de la dimension. Tandis que la nature abstraite de la classe permet d'unifier la prise en compte des différentes fonctions de mélange, déduites par héritage et polymorphisme. Ainsi, une classe concrète correspondant à une fonction de mélange donnée est obtenue via l'instantiation pour un type **Dimension** concret d'une classe dérivée de **FonctionMelange** (Figure 36).

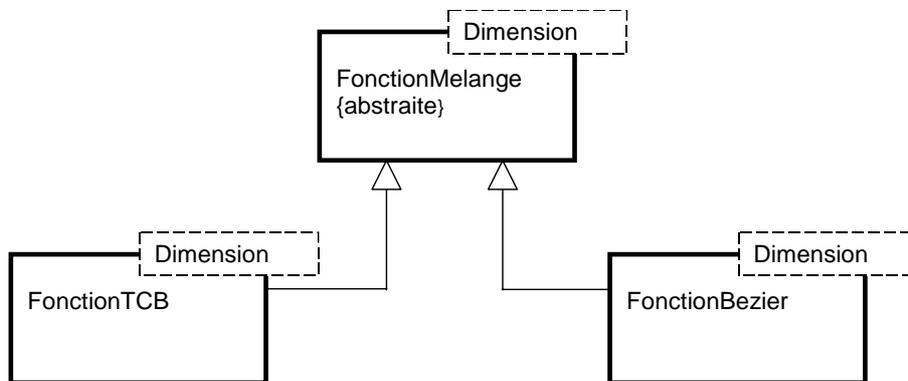


Figure 36 Représentation schématique de l'architecture des classes **FonctionMelange**.

Cette architecture de classe permet en l'occurrence, grâce au mécanisme d'héritage et de méthodes virtuelles, de procéder au sein des classes dérivées à des optimisations structurelles : chaque classe a la charge d'allouer l'espace mémoire qui lui est nécessaire pour stocker ses fonctions de mélange (4 polynômes de degré 3 pour une fonction de mélange de Kochanek, m polynômes de degré m pour une fonction de mélange de Bézier). D'autre part, la surcharge de méthodes virtuelles permet de générer du code spécifique exploitant les propriétés mathématiques des fonctions mélange. Ainsi, pour des fonctions de mélange définies à partir de polynômes, je suis en mesure de pré-calculer leurs dérivées de façon exacte. Ces dérivées interviennent dans le calcul de la dérivée de la fonction de positionnement, utilisée pour

déterminer des vecteurs tangents à la variété spline ou pour calculer l'abscisse curviligne en tout point de la variété, nécessaire à l'évaluation des longueurs.

Enfin, la classe **Spline** est l'objet informatique qui modélise une variété spline de dimension d . Pour les mêmes raisons énoncées pour les fonctions de mélange, la classe **Spline** est un patron de classe abstrait, paramétré par un type **Dimension**. Ainsi, une classe concrète correspondant à une variété spline de nature et de dimension données est obtenue via l'instantiation pour l'un des types **Dimension** concret d'une classe dérivée de **Spline** (Figure 37). Le choix d'une classe dérivée conditionne la nature des fonctions de mélange $b_i^j(\omega)$ utilisées ainsi que la relation entre le nombre de points de contrôle n et le nombre de sous-variétés splines ns .

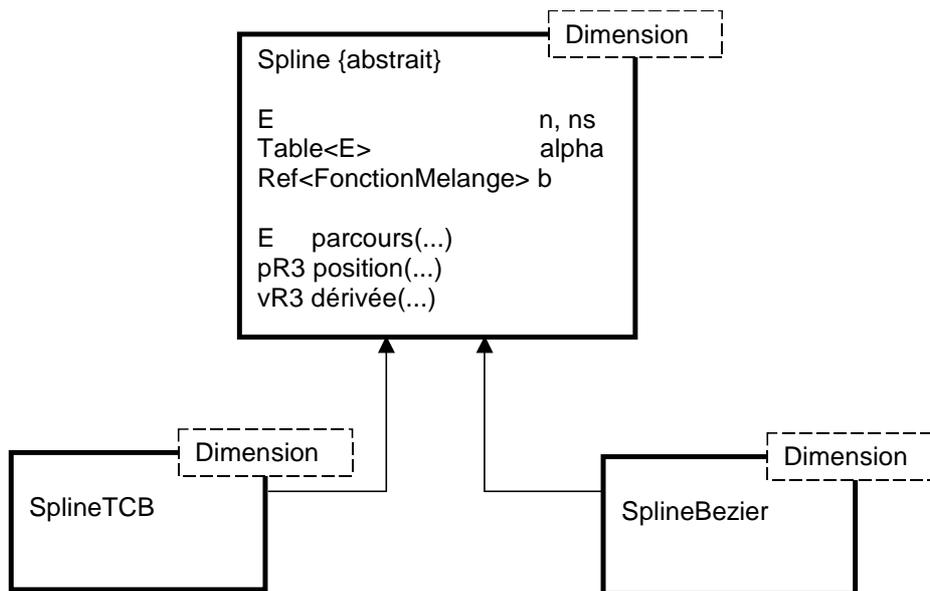


Figure 37 Représentation schématique de l'architecture des classes **Spline**.

La classe **Spline** est composée des champs suivants :

- ❑ Un multi-indice n correspondant au « nombre » de points de contrôle de la variété spline.
- ❑ Un multi-indice ns correspondant au « nombre » de sous-variétés de la variété spline.
- ❑ Une table de transcodage α modélisant la fonction de transcodage α_n introduite en section 2.4. A partir d'un multi-indice i de type **Dimension::E**, la table α permet d'accéder à l'indice i de la coordonnée x du point de contrôle i dans le vecteur des coordonnées généralisées η .
- ❑ Une référence à un objet **FonctionMelange** notée b .

La classe **Spline** est dotée des méthodes suivantes :

- ❑ Une méthode abstraite **parcours** qui, pour un numéro de sous-variété j , retourne un parcourneur des points de contrôle intervenant dans la définition de la sous-variété j . C'est à chaque classe dérivée, seule capable d'établir le lien entre points de contrôle et sous-variétés, que revient la responsabilité d'implanter cette méthode. La surcharge de

la méthode abstraite **parcours** assure donc que, dans tous les cas de figure, le parcours des points de contrôle sera optimal.

- Une méthode **position** qui, à partir d'un vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$ renseignant sur la configuration du réseau de points de contrôle, d'un numéro de sous-variété \mathbf{j} de type **Dimension::E** et d'un indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$ de type **Dimension::R**, retourne la position dans \mathbb{R}^3 de la particule identifiée par le couple $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ dans la configuration donnée par le vecteur $\boldsymbol{\eta}$. Cette méthode correspond au codage informatique de la fonction de positionnement Φ introduite en (1.25). La méthode **position** s'appuie naturellement sur la méthode **parcours** pour l'évaluation de la fonction de positionnement.
- Une méthode **dérivée** qui, à partir d'un vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$, d'un numéro de sous-variété \mathbf{j} de type **Dimension::E**, d'un indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$ de type **Dimension::R** et d'un multi-indice \mathbf{a} **Dimension::E** renseignant sur l'ordre de dérivation, retourne la dérivée de la position dans \mathbb{R}^3 de la particule identifiée par le couple $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$. Cette méthode permet d'évaluer en l'occurrence des vecteurs tangents aux fibres matérielles de la variété spline, permettant de déduire la normale à un élément surfacique infinitésimal pour l'application d'une force de pression ou pour les besoins du rendu lors de la visualisation d'une variété spline.

Pour résumer, la classe **Spline** correspond au codage informatique de la structure géométrique d'une variété spline. On peut constater que les points de contrôle n'apparaissent pas dans la liste des champs de la classe. En effet, fidèles à la volonté de proposer un modèle informatique aussi proche que possible du modèle mathématique, je préserve la séparation de la description cinématique du système matériel. Ainsi, à partir de la donnée extérieure d'un jeu de points de contrôle stockés dans un vecteur unidimensionnel $\boldsymbol{\eta}$, la classe **Spline** est en mesure d'évaluer la position de toute particule ainsi que des directions parallèles aux fibres principales de la variété dans cette configuration proposée.

A ce jour, j'ai implanté essentiellement des splines de nature cubique telles que les splines cardinales, les splines de Catmull-Rom et les splines de Kochanek. Cette préférence pour les splines cubiques a été motivée par les choix de Jean-Michel Nourrit lors de la réalisation d'un modèle géométrique de tricots à base de courbes splines [Nourrit 1999].

CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DES VARIETES SPLINES

1 Cinématique

Afin de simuler le comportement d'objets déformables continus, il me faut dans un premier temps formaliser mathématiquement le mouvement de ces corps modélisés à l'aide de variétés splines. Ce mouvement peut être perçu comme une succession de configurations géométriques instantanées indexées par le temps. Puisque la configuration d'une variété spline est complètement déterminée par les coordonnées de ses points de contrôle, j'introduis des points de contrôle mobiles $\mathbf{p}^i(t)$ pour caractériser le mouvement d'une variété spline. L'équation (1.19) du chapitre 2 devient alors, avec l'introduction du temps :

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{p}^i(t) \quad 1 \leq \mathbf{j} \leq n\mathbf{s}, \boldsymbol{\omega} \in [0, 1]^d \quad (2.1)$$

Dans le cadre d'une description lagrangienne du mouvement, où chaque particule est identifiée par son numéro de sous-variété \mathbf{j} et son indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$, l'expression $\mathbf{p}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ de l'équation (2.1) correspond à la définition de la trajectoire particulière. La cinématique d'une variété spline est synthétisée par l'ensemble de ces trajectoires particulières. D'apparence indénombrable, cette cinématique peut se réduire à une finitude de « trajectoires généralisées » matérialisées par les trajectoires des points de contrôle. Cet aspect de la modélisation cinématique est développé en détail dans les sections de ce chapitre

1.1 Fonction des configurations

J'introduis naturellement la fonction des configurations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Cette trajectoire généralisée, puisqu'elle synthétise l'évolution des coordonnées généralisées, est une courbe (paramétrée par le temps) de l'espace de configurations \mathbb{U} . L'équation (2.2) donne l'expression de la fonction des configurations déduite de l'équation (1.23) du chapitre 1.

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n+1} & \text{où } \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = t \\ t \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(t) & \forall 1 \leq \mathbf{i} \leq n : \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha_n(\mathbf{i})+(k-1)n}(t) = p_k^{\mathbf{i}}(t) \quad 1 \leq k \leq 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

En utilisant cette définition de la fonction des configurations, l'expression de la trajectoire particulière (2.1) d'un point de la variété spline, identifié par son numéro de sous-variété \mathbf{j} et son indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$, devient :

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \quad (2.3)$$

La fonction Φ correspond à la fonction de positionnement définie dans le chapitre précédent. On rappelle tout de même que la fonction de positionnement d'une variété spline est une application linéaire des coordonnées généralisées dont la représentation matricielle $\mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ est de la forme suivante.

$$\mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & \vdots & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Le terme $\mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega})$ est une matrice ligne composée de l'ensemble des valeurs des fonctions de mélange en $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) = \left(b_{\alpha_n^{-1}(1)}^j(\boldsymbol{\omega}) \cdots b_{\alpha_n^{-1}(n)}^j(\boldsymbol{\omega}) \right) \quad (2.5)$$

1.2 Fonction de vitesse

La définition de la trajectoire particulière (2.1) permet de déduire, par dérivation temporelle, l'expression de la vitesse particulière d'un point de la variété spline identifié par le couple $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$.

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt}(\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (2.6)$$

Comme la fonction de positionnement Φ est une application linéaire des coordonnées généralisées, elle est identique à sa jacobienne. Ainsi, l'expression de la vitesse particulière devient :

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (2.7)$$

La **fonction de vitesse** qui, à une configuration géométrique $\boldsymbol{\eta}$, son taux de variation $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ et une particule de la variété spline identifiée par le couple $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$, fait correspondre la vitesse de cette particule s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\hat{\Phi} : \begin{cases} \mathbb{U} \times \hat{\mathbb{U}} \times \mathbb{N}^d \times [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (2.8)$$

Il est important de mentionner que l'évaluation de la fonction de vitesse est indépendante du vecteur des coordonnées généralisées, ne reposant en fait que sur les taux de variation des coordonnées généralisées et de l'identifiant particulière (\mathbf{j}, ω) .

Evidemment, on peut écrire :

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{j}, \omega) = \hat{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t), \mathbf{j}, \omega) \quad (2.9)$$

2 Dynamique

La dynamique consiste en l'étude des causes de la modification du mouvement qui se manifestent sous la forme d'efforts. Plus encore, la dynamique a pour vocation de mettre en relation le mouvement et ses causes profondes. Cette relation est mathématiquement formalisée par ce que l'on nomme couramment l'équation du mouvement. J'ai choisi d'utiliser les équations de Lagrange pour décrire le mouvement des variétés splines.

Au fil de ce chapitre, je vais commencer par donner une définition de la répartition massique paramétrique d'une variété spline : répartition massique qui, bien que compatible avec la définition géométrique, n'est pas naturelle pour un physicien. Je montrerai alors comment, à partir d'une définition intuitive de la densité de masse par unité de longueur, je peux déduire l'expression de la répartition massique paramétrique d'une variété spline. Par la suite, je donnerai une expression de l'énergie cinétique spécifique aux variétés splines me permettant d'opérer une simplification formelle des équations de Lagrange afin d'aboutir à un système différentiel équivalent aux propriétés structurelles intéressantes en termes d'optimisation. Je terminerai ce chapitre par l'explicitation de quelques efforts externes et internes, en donnant systématiquement leur expression particulière dans le cadre des variétés splines.

2.1 Répartition massique

A l'image de la représentation continue des particules au sein de la variété spline, je désire donner une définition d'une répartition massique continue pour la variété. Ainsi, la densité de masse est une fonction du temps et du couple (\mathbf{j}, ω) où \mathbf{j} est le numéro de sous-variété et ω l'indice paramétrique de la particule.

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{N}_{\text{ns}}^d \times [0,1]^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{j}, \omega, t) \mapsto \mu(\mathbf{j}, \omega, t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce choix est à distinguer des modélisations dans lesquelles des points caractéristiques de l'objet sont assimilés à des particules massiques. Ces modélisations engendrent une discrétisation de la masse totale, concentrée autour de points caractéristiques.

Mais cette définition de la densité de masse de nature paramétrique n'est pas intuitive. En effet, les physiciens ont pour habitude de considérer des répartitions massiques par unité de longueur, surface ou volume. Mon objectif est donc de déterminer, à partir de la donnée d'une densité de masse par unité métrique $\rho(\mathbf{j}, \omega, t)$, une densité de masse par unité paramétrique $\mu(\mathbf{j}, \omega, t)$.

Je décide de me limiter d'abord au cas des courbes splines pour mettre en évidence la relation qui lie la densité par unité de longueur $\rho(j, \omega, t)$ et la densité par unité paramétrique $\mu(j, \omega, t)$. Pour cela j'introduis la définition de l'abscisse curviligne (2.11) qui permet de mesurer la longueur d'un segment infinitésimal.

$$l(j, \omega, t) = \int_0^{\omega} \|\partial_u \mathbf{p}(j, u, t)\| du \quad ; \quad \partial_{\omega} l(j, \omega, t) = \|\partial_{\omega} \mathbf{p}(j, \omega, t)\| \quad (2.11)$$

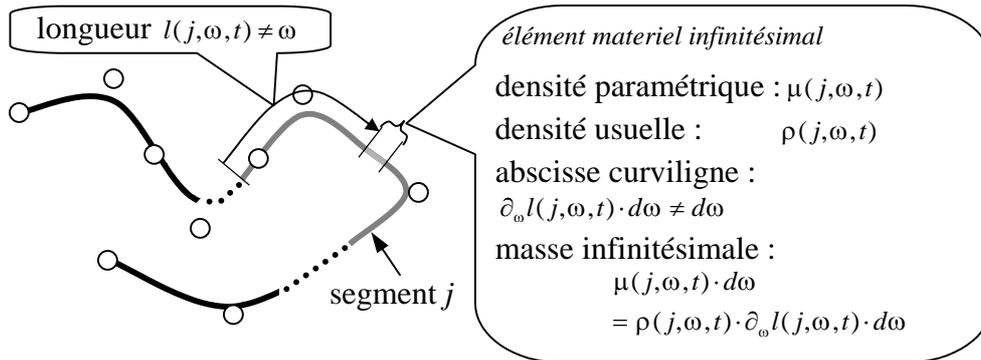


Figure 38 Répartition massique par unité de longueur et répartition massique par unité paramétrique.

En un point ω du segment j de la courbe, pour un élément matériel infinitésimal correspondant à une variation paramétrique $d\omega$, on a la relation suivante entre les densités :

$$\mu(j, \omega, t) d\omega = \rho(j, \omega, t) \partial_{\omega} l(j, \omega, t) d\omega \quad (2.12)$$

Cette relation est naturellement transposable au cas des surfaces (2.13) et des volumes (2.14).

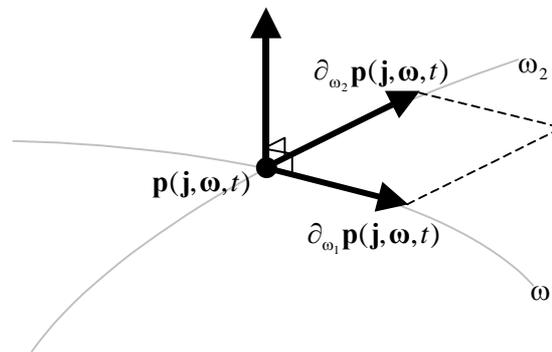


Figure 39 Élément infinitésimal de surface.

$$\mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} = \rho(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) ds(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (2.13)$$

où $ds(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) = \|\partial_{\omega_1} \mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) \wedge \partial_{\omega_2} \mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t)\| d\boldsymbol{\omega}$

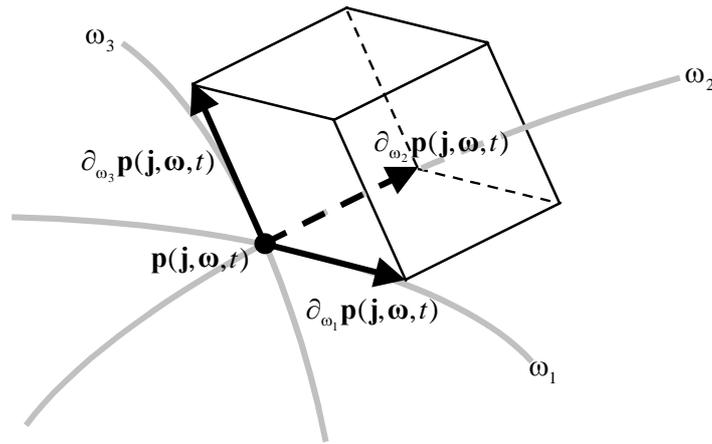


Figure 40 Élément infinitésimal de volume.

$$\mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} = \rho(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) dv(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) \quad (2.14)$$

où $dv(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) = (\partial_{\omega_1} \mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) \wedge \partial_{\omega_2} \mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t)) \cdot \partial_{\omega_3} \mathbf{p}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega}$

De cette manière, je suis en mesure de définir une densité massique par unité paramétrique $\mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t)$ équivalente à une densité massique par unité métrique $\rho^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t)$ valide pour un état de référence caractérisé par un jeu de points de contrôle \mathbf{p}^{0i} .

A partir de maintenant, on se place dans le cadre des variétés splines de dimension 3 qui correspond au cadre le plus général. Le résultat pourra ultérieurement être réinterprété en dimensions 1 et 2 de façon aisée.

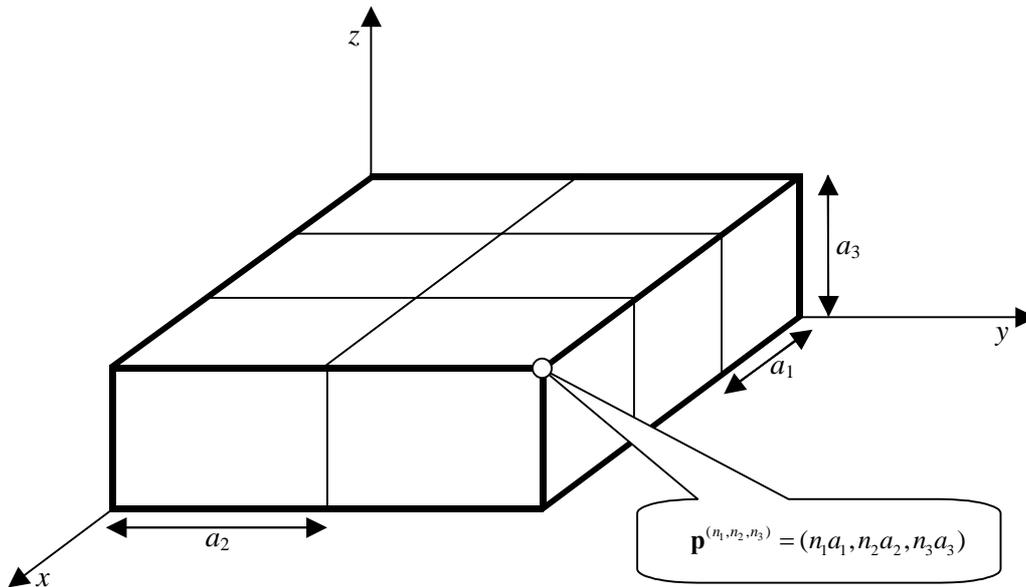


Figure 41 Etat de référence d'une variété spline de dimension 3.

Ainsi, l'état de référence de la variété spline est obtenu à partir d'un réseau régulier de points de contrôle. De forme parallélépipédique, ses arêtes sont alignées aux axes principaux et ont pour longueurs respectives $n_1 a_1, n_2 a_2$ et $n_3 a_3$ (Figure 41). La position d'un point identifié par le couple $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ dans cet état de référence est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \left(a_1 i_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 i_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 i_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \mathbf{1} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{ns}, \boldsymbol{\omega} \in [0,1]^d \quad (2.15)$$

Pour cet état de référence, l'équation (2.14) devient :

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} &= \rho^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) dv^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \\ \text{où } dv^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) &= \left(\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \wedge \partial_{\omega_2} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right) \cdot \partial_{\omega_3} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Au vu de la configuration particulière de l'état de référence, donnée par les positions des points de contrôle \mathbf{p}^{0i} , on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} dv^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) &= \left\| \partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right\| \left\| \partial_{\omega_2} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right\| \left\| \partial_{\omega_3} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right\| d\boldsymbol{\omega} \\ &= \partial_{\omega_1} l_1^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \partial_{\omega_2} l_2^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \partial_{\omega_3} l_3^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Les trois termes $\left\| \partial_{\omega_k} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right\| = (\partial_{\omega_k} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}))^2)^{1/2}$ correspondent aux abscisses curvilignes dans les directions principales pour l'état de référence défini en (2.15). Pour la commodité des calculs et ce, sans perte de généralité, je vais me contenter d'exprimer le terme $\left\| \partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \right\|$.

$$\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \partial_{\omega_1} \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \left(a_1 i_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 i_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 i_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.18)$$

Je fais l'hypothèse supplémentaire que les fonctions de mélange $b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega})$ sont séparables. Cette hypothèse est peu restrictive dans la mesure où la propriété de séparabilité est largement utilisée pour construire des surfaces ou des volumes splines.

$$b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) = b_i^{j_1}(\omega_1) b_i^{j_2}(\omega_2) b_i^{j_3}(\omega_3) \quad (2.19)$$

Par conséquent, l'équation (2.18) se transforme en :

$$\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_1}^{j_1}(\omega_1) b_{i_2}^{j_2}(\omega_2) b_{i_3}^{j_3}(\omega_3) \left(a_1 i_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 i_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 i_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (2.20)$$

Après développement du terme de droite, on débouche sur une somme de trois termes :

$$\begin{aligned}
 \partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) &= \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1 i_1 b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \sum_{i_2=1}^{n_2} b_{i_2}^{j_2}(\omega_2) \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_3}^{j_3}(\omega_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i_2=1}^{n_2} a_2 i_2 b_{i_2}^{j_2}(\omega_2) \sum_{i_3=1}^{n_3} b_{i_3}^{j_3}(\omega_3) \sum_{i_1=1}^{n_1} b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{i_3=1}^{n_3} a_3 i_3 b_{i_3}^{j_3}(\omega_3) \sum_{i_2=1}^{n_2} b_{i_2}^{j_2}(\omega_2) \sum_{i_1=1}^{n_1} b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

On impose une nouvelle condition aux fonctions de mélange. Cette condition qui consiste en une hypothèse de normalité est, tout comme la séparabilité (2.19), largement répandue et ne constitue donc pas une restriction importante :

$$\forall j, \omega : \sum_{i=1}^n b_i^j(\omega) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i^{j'}(\omega) = 0 \tag{2.22}$$

L'équation (2.21) se simplifie alors en un seul terme :

$$\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1 i_1 b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

L'abscisse curviligne $\|\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})\|$ s'exprime finalement de la manière suivante :

$$\|\partial_{\omega_1} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})\| = \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1 i_1 b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \tag{2.24}$$

Plus généralement, puisque le développement précédent est identique pour les coordonnées ω_2 et ω_3 :

$$\|\partial_{\omega_k} \mathbf{p}^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})\| = \sum_{i=1}^{n_k} a_k i b_i^{j_k'}(\omega_k) \tag{2.25}$$

Par conséquent l'équation (2.16) devient après calculs :

$$\mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) d\boldsymbol{\omega} = \rho^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}, t) \sum_{i_1=1}^{n_1} a_1 i_1 b_{i_1}^{j_1'}(\omega_1) \sum_{i_2=1}^{n_2} a_2 i_2 b_{i_2}^{j_2'}(\omega_2) \sum_{i_3=1}^{n_3} a_3 i_3 b_{i_3}^{j_3'}(\omega_3) \tag{2.26}$$

Si l'on considère une densité massique par unité métrique $\rho^0(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ constante vis à vis du temps, on débouche sur une expression simplifiée de la densité de masse paramétrique, invariante elle aussi vis à vis du temps.

$$\mu : \begin{cases} \mathbb{N}_{ns}^d \times [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad (2.27)$$

Cette nouvelle définition paramétrique de la répartition massique suggère que la matière est attachée à sa position paramétrique $\boldsymbol{\omega}$ au sein d'une sous-variété \mathbf{j} . En d'autres termes, on suppose que la matière ne glisse pas à l'intérieur de la variété spline.

2.2 Energie cinétique, équations de Lagrange

Une fois la répartition massique explicitée, je suis en mesure de donner une expression de l'énergie cinétique spécifique aux variétés splines. L'énergie cinétique d'une variété spline est définie de manière classique comme suit :

$$K(t) = \sum_{1 \leq \mathbf{j} \leq ns} \frac{1}{2} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{v}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})^2 d\boldsymbol{\omega} \quad (2.28)$$

Je rappelle la définition de la fonction d'énergie cinétique, opérant un découplage entre les caractéristiques structurelles du système et sa configuration.

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{U} \times \hat{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \mapsto \kappa(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{cases} \quad (2.29)$$

La matrice $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ est la matrice des masses généralisées de la variété spline. L'équation (2.30) fournit l'expression particulière de $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ pour une variété spline.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{1 \leq \mathbf{j} \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega})^T \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (2.30)$$

Comme je l'ai mentionné dans la section consacrée à la cinématique, la fonction de positionnement Φ d'une variété spline est une application linéaire des coordonnées généralisées. La matrice $\mathbf{B}(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ est donc indépendante des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$, conférant ainsi à la matrice des masses généralisées $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ la propriété d'invariance. Pour refléter cette propriété, la matrice des masses généralisées sera désormais notée \mathbf{M} .

D'autre part, au vu de la structure par blocs de la matrice jacobienne de la fonction de positionnement Φ , la matrice des masses généralisées hérite de cette structure par blocs illustrée par l'équation suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{m} & & \\ \vdots & & \mathbf{m} & \\ 0 & & & \mathbf{m} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} \in M_n(\mathbb{R}) \quad (2.31)$$

Les trois blocs identiques de la diagonale, désignés par \mathbf{m} , sont symétriques et s'expriment ainsi :

$$\mathbf{m} = \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega})^T \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (2.32)$$

Ou, de façon équivalente, si l'on considère les éléments scalaires de la matrice \mathbf{m} :

$$m_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) b_{\alpha_n^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) b_{\alpha_n^{-1}(k)}^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad 1 \leq i, k \leq n \quad (2.33)$$

La particularité structurelle de la matrice des masses généralisées \mathbf{M} a d'intéressantes conséquences sur l'expression du système différentiel équivalent aux équations de Lagrange. Je rappelle d'abord brièvement l'expression de ce système différentiel. Les équations de Lagrange ci-dessous,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{\eta}_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \frac{\partial \kappa}{\partial \eta_i}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) = Q_i(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.34)$$

sont équivalentes au système différentiel suivant :

$$\mathbf{M}^{**}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) - \mathbf{In}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \quad (2.35)$$

Le vecteur $\mathbf{In}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ correspondant au **vecteur des termes inertiels**. Dans la mesure où la matrice des masses généralisées \mathbf{M} d'une variété spline est invariante, le vecteur des termes inertiels $\mathbf{In}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))$ est nul. On débouche alors sur une expression simplifiée du système différentiel conditionnant l'évolution d'une variété spline.

$$\mathbf{M}^{**} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) \quad (2.36)$$

2.3 Efforts

Les efforts interviennent dans les équations de Lagrange par le biais du vecteur des forces généralisées noté $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$. Je donne dans cette section l'expression de plusieurs natures d'efforts en exploitant les particularités géométriques des variétés splines.

2.3.1 Force ponctuelle générique

Une particularité importante du modèle de variété spline réside dans la faculté d'identifier toute particule du milieu continu que constitue cette variété. Cette propriété permet d'appliquer une force ponctuelle donnée en un point quelconque identifié par son numéro de sous-variété \mathbf{j} et son indice paramétrique $\boldsymbol{\omega}$. Si $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ est un effort ponctuel appliqué en $(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$, le vecteur des forces généralisées $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ associé est de la forme :

$$\mathcal{Q}_{i+(l-1)n}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})^T \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}_{i+(l-1)n}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \quad \forall 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3 \quad (2.37)$$

De part la définition de la fonction de positionnement d'une variété spline, on est en mesure d'écrire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}_{i+(l-1)n}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{m=1}^n b_{\alpha_n^{-1}(m)}^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \delta_{mi} \begin{bmatrix} \delta_{1l} \\ \delta_{2l} \\ \delta_{3l} \end{bmatrix} = b_{\alpha_n^{-1}(i)}^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \begin{bmatrix} \delta_{1l} \\ \delta_{2l} \\ \delta_{3l} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

L'équation (2.37) devient finalement,

$$\mathcal{Q}_{i+(l-1)n}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = b_{\alpha_n^{-1}(i)}^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})^T \begin{bmatrix} \delta_{1l} \\ \delta_{2l} \\ \delta_{3l} \end{bmatrix} = b_{\alpha_n^{-1}(i)}^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) F_l(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad \forall 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

Je mets à profit cette habilité à définir des forces appliquées en des points quelconques de la variété spline pour construire un réseau de ressorts attachés en des points caractéristiques afin de modéliser les efforts internes d'élasticité. Ce choix, difficilement justifiable par son manque d'adéquation avec la réalité du matériau mais aussi par la discrétisation qu'il engendre, consiste en une première approche des phénomènes élastiques. Je propose dans le chapitre 3, la définition d'une énergie continue de déformation afin d'éliminer cette étape de discrétisation indésirable des efforts. Mais ces premiers travaux vers la définition d'un modèle d'efforts continus se limitent pour le moment au cas de courbes splines.

2.3.2 Densité d'efforts : amortissement

Afin de réduire les oscillations dues à la réponse des contraintes internes, j'introduis une densité d'efforts d'amortissement définie pour chaque particule de la variété. On ne peut pas à proprement parler de viscosité puisque les efforts considérés sont détachés de toute considération aérodynamique. Il s'agit en fait d'une densité d'efforts proportionnelle à l'opposé du champ des vitesses instantanées. Cette densité d'efforts appliqués en tout point matériel de coordonnées paramétriques $\boldsymbol{\omega}$ au sein de chaque sous-variété \mathbf{j} a la forme suivante :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = -C \hat{\Phi}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \quad \forall \mathbf{j} \in \mathbb{N}_{\text{ns}}^d, \forall \boldsymbol{\omega} \in [0, 1]^d \quad (2.40)$$

C est le coefficient d'amortissement.

En utilisant l'expression de la fonction de vitesse (2.8), on a aussi :

$$F_l(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = -C \sum_{1 \leq k \leq n} b_{\alpha_n^{-1}(k)}^j(\boldsymbol{\omega}) \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k+(l-1)n}(t) \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.41)$$

L'équation (2.38) permet de donner l'expression des coordonnées du vecteur des forces généralisées d'amortissement,

$$\begin{aligned} Q_{i+ln}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) &= \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})^T \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{i+ln}}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})^T \begin{pmatrix} b_{\alpha_n^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) \\ \begin{bmatrix} \delta_{1l} \\ \delta_{2l} \\ \delta_{3l} \end{bmatrix} \end{pmatrix} d\boldsymbol{\omega} \quad \forall 1 \leq i \leq n, k = 1, 2, 3 \\ &= \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} -C \sum_{k=1}^n b_{\alpha_n^{-1}(k)}^j(\boldsymbol{\omega}) \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k+(l-1)n}(t) b_{\alpha_n^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= -C \sum_{k=1}^n \hat{\boldsymbol{\eta}}_{k+(l-1)n} \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} b_{\alpha_n^{-1}(k)}^j(\boldsymbol{\omega}) b_{\alpha_n^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les $3n$ expressions des coordonnées du vecteur $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ peuvent être synthétisée de la sorte :

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\Theta} \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.43)$$

$\boldsymbol{\Theta}$ est une matrice carrée de dimension $3n$, constituée de trois blocs identiques constants sur sa diagonale.

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} & & \\ & \boldsymbol{\theta} & \\ & & \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_{ik} = -C \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} b_{\alpha_n^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) b_{\alpha_n^{-1}(k)}^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (2.44)$$

2.3.3 Energie potentielle : gravitation

Les efforts de gravitation sont déduits de l'énergie potentielle de gravitation définie comme suit :

$$E(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \Phi(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})^T \mathbf{g} d\boldsymbol{\omega} \quad (2.45)$$

le vecteur \mathbf{g} est dirigé selon la verticale gravitationnelle et sa norme $g = \|\mathbf{g}\|$ est la constante de gravitation locale.

Le vecteur des forces généralisées de gravitation correspond à la dérivée partielle de l'énergie potentielle de gravitation par rapport au vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}$.

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\eta}^*} = - \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}^*}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})^T \mathbf{g} d\boldsymbol{\omega} \quad (2.46)$$

On utilise alors l'expression particulière de la jacobienne de la fonction de positionnement (2.4) pour donner une nouvelle formulation du vecteur des forces généralisées de gravitation \mathbf{Q} .

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi} & & \\ & \mathbf{\Pi} & \\ & & \mathbf{\Pi} \end{pmatrix} \mathbf{g} \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Pi} = - \sum_{1 \leq j \leq ns} \int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}^j(\boldsymbol{\omega})^T d\boldsymbol{\omega} \quad (2.47)$$

3 Codage informatique

L'introduction de nouveaux éléments mathématiques relatifs à la dynamique des variétés splines a d'importantes conséquences sur l'implantation informatique qui se matérialisent par la construction de nouvelles classes. Ainsi apparaît une classe abstraite **Densite** paramétrée par l'un des types **Dimension**, codant la répartition massique paramétrique définie en (2.10). Fidèle au mécanisme d'héritage utilisé pour les classes précédemment définies, une classe concrète correspondant à une répartition massique particulière est obtenue via l'instantiation pour un type **Dimension** concret d'une classe dérivée de **Densite** (Figure 42).

La classe **Densite** a la charge d'évaluer tous les termes faisant intervenir la répartition massique, à savoir les coefficients de la matrice des masses généralisées \mathbf{M} (2.31) et ceux de la matrice $\mathbf{\Pi}$ des efforts de gravitation (2.47). Au vu de l'expression des coefficients à évaluer, on dote la classe **Densité** de deux méthodes abstraites :

- Une méthode **calculeIntegraleBji** qui, à partir d'une référence à un objet de type **FonctionMelange** et de deux multi-indices \mathbf{i} et \mathbf{j} de type **Dimension::E**, calcule le terme intégral (2.48) intervenant dans l'expression des efforts de gravitation.

$$\int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}_i^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (2.48)$$

- Une méthode **calculeIntegraleBjiBjk** qui, à partir d'une référence à un objet de type **FonctionMelange** et de trois multi-indices \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} de type **Dimension::E**, calcule le terme intégral (2.49) intervenant dans l'expression de la matrice des masses généralisées.

$$\int_{[0,1]^d} \mu(\mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}_i^j(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{b}_k^j(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (2.49)$$

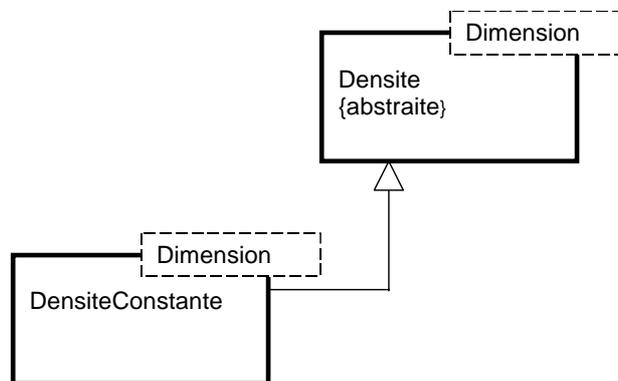


Figure 42 Représentation schématique de l'architecture des classes **Densite**.

La définition de ces deux méthodes dans la classe **Densite** implique l'ajout de méthodes abstraites à la classe **FonctionMelange** de même nature :

- Une méthode **calculeIntegraleBji** qui, à partir de deux multi-indices **i** et **j** de type **Dimension::E**, calcule le terme intégral (2.50).

$$\int_{[0,1]^d} \mathbf{b}_i^j(\omega) d\omega \quad (2.50)$$

- Une méthode **calculeIntegraleBjiBjk** qui, à partir de trois multi-indices **i**, **j** et **k** de type **Dimension::E**, calcule le terme intégral (2.51).

$$\int_{[0,1]^d} \mathbf{b}_i^j(\omega) \mathbf{b}_k^j(\omega) d\omega \quad (2.51)$$

Cette logique permet en l'occurrence de calculer de façon exacte les termes (2.48) et (2.49) pour une variété spline de densité massique constante dont les fonction de mélange sont des polynômes, qui constitue un type de variété spline fréquemment utilisé.

Enfin, la classe **Spline** s'enrichit de nouveaux champs tels que :

- Une matrice **M** correspondant à la matrice des masses généralisées de la variété spline. Il est important de mentionner que, pour une densité massique invariante et des fonctions de mélange polynomiales, la matrice **M** est constante et peut être évaluée de façon formellement exacte lors de l'étape d'initialisation. De plus, on peut pré-calculer sa décomposition afin d'accélérer la résolution du système linéaire, équivalent aux équations de Lagrange.
- Une matrice **Theta** correspondant à la matrice d'amortissement définie en (2.44). Sous les mêmes conditions que précédemment, cette matrice est constante et peut donc être pré-calculée de façon formellement exacte durant l'étape d'initialisation.
- Une matrice **Pi** correspondant à la matrice gravitationnelle définie en (2.47). Si le vecteur **g** est invariant, le vecteur des forces généralisées de gravitation **Q** déduit du produit de **Pi** et de **g** peut être pré-calculé lui aussi.

De cette manière, les efforts de gravitation et d'amortissement sont pris en compte de façon efficace au sein de la classe **Spline**. Par contre, Il existe un type d'effort dont je n'ai pas encore parlé : en effet, les efforts issus des contraintes internes au sein d'un corps déformable sont d'une importance primordiale et leur modélisation soulève nombre de problèmes. Voilà pourquoi, j'ai choisi d'y consacrer le chapitre suivant.

4 Exemples de variétés splines

4.1 Plongeoir

Le système matériel considéré est modélisé à l'aide d'une variété spline cubique d'Hermite de dimension 3 constituée de (9,6,5) points de contrôle et de (6,3,2) sous-variétés splines. L'élasticité interne du plongeoir est garantie par la mise en œuvre d'un réseau de ressorts au nombre de (2,2,2) par sous-variétés, régulièrement répartis.

L'extrémité gauche du plongeur demeure figée grâce à l'ajout de 8 contraintes de point fixe sur les points de contrôle de la face gauche de la variété spline.

Enfin, le plongeur est soumis à des efforts de gravité, d'amortissement mais aussi à trois forces ponctuelles appliquées sur le dessus de l'extrémité droite de l'objet durant un court instant, lui conférant un mouvement oscillatoire amorti. Les images de la Figure 43 sont des clichés pris à des instants successifs issus de l'animation répondant à cette définition

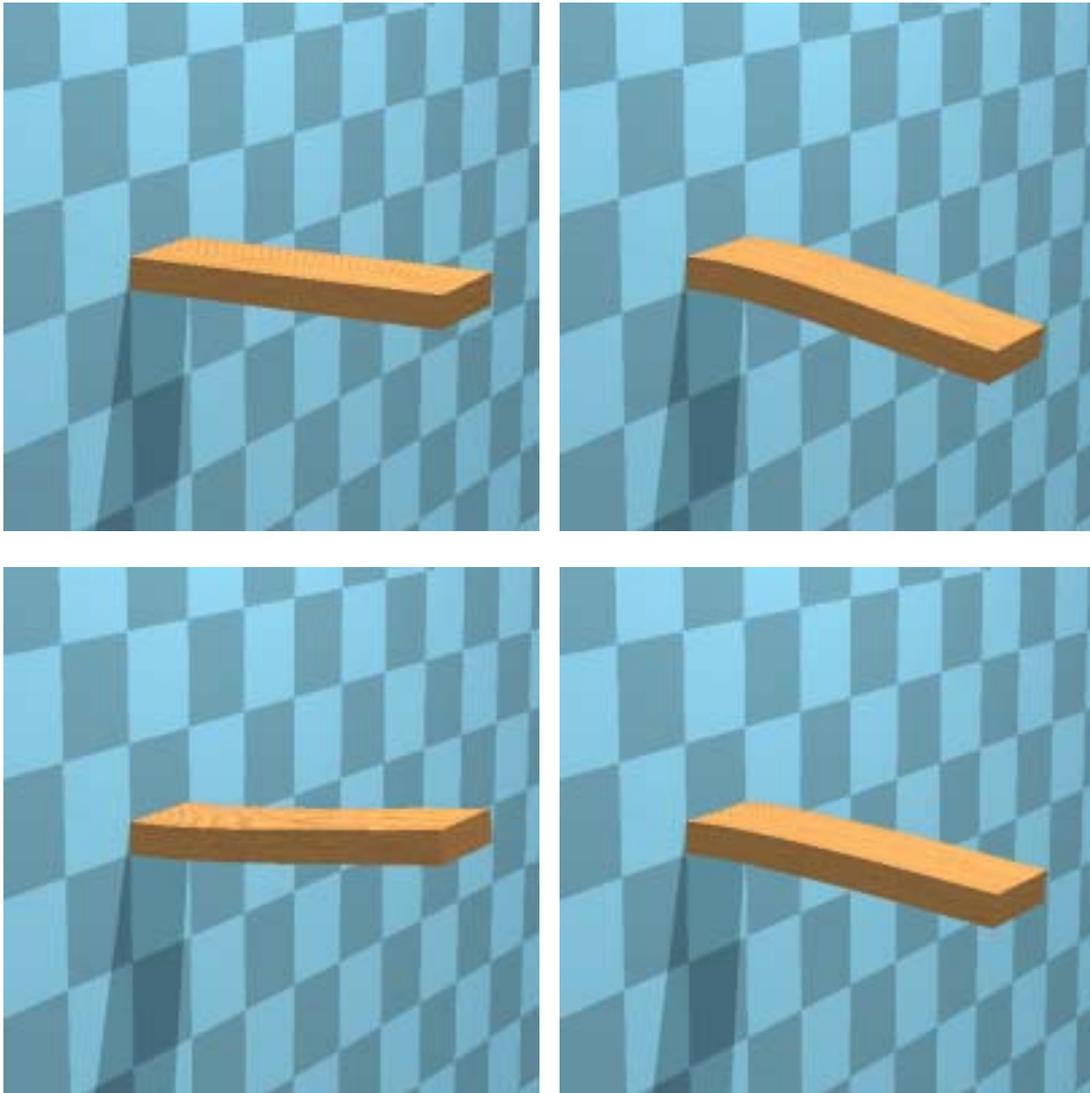


Figure 43 Images issues d'une animation reproduisant le mouvement oscillatoire amorti d'un plongeur.

4.2 Cube élastique

Le deuxième exemple de système matériel est constitué de deux corps déformables. D'une part, la corde est modélisée à l'aide d'une courbe spline cubique d'Hermite composée de 7 points de contrôle. Deux ressorts par segment spline viennent garantir la cohésion de la corde. D'autre part, le cube est représenté par une variété spline cubique d'Hermite de dimension 3 constituée de (5,5,5) points de contrôle et (2,2,2) sous-variétés splines. De même, le cube est doté de ressorts, au nombre de (2,2) par sous-variété, pour modéliser les efforts internes d'élasticité.

Un contrainte de distance entre une extrémité de la corde et un coin du cube permet de lier ces deux corps déformables au fil de l'animation. Et une contrainte de point fixe imposée à l'autre extrémité en fait un point d'attache.

Le système composé de la corde et du cube est uniquement soumis aux efforts de gravité, d'amortissement et d'élasticité interne (Figure 44).

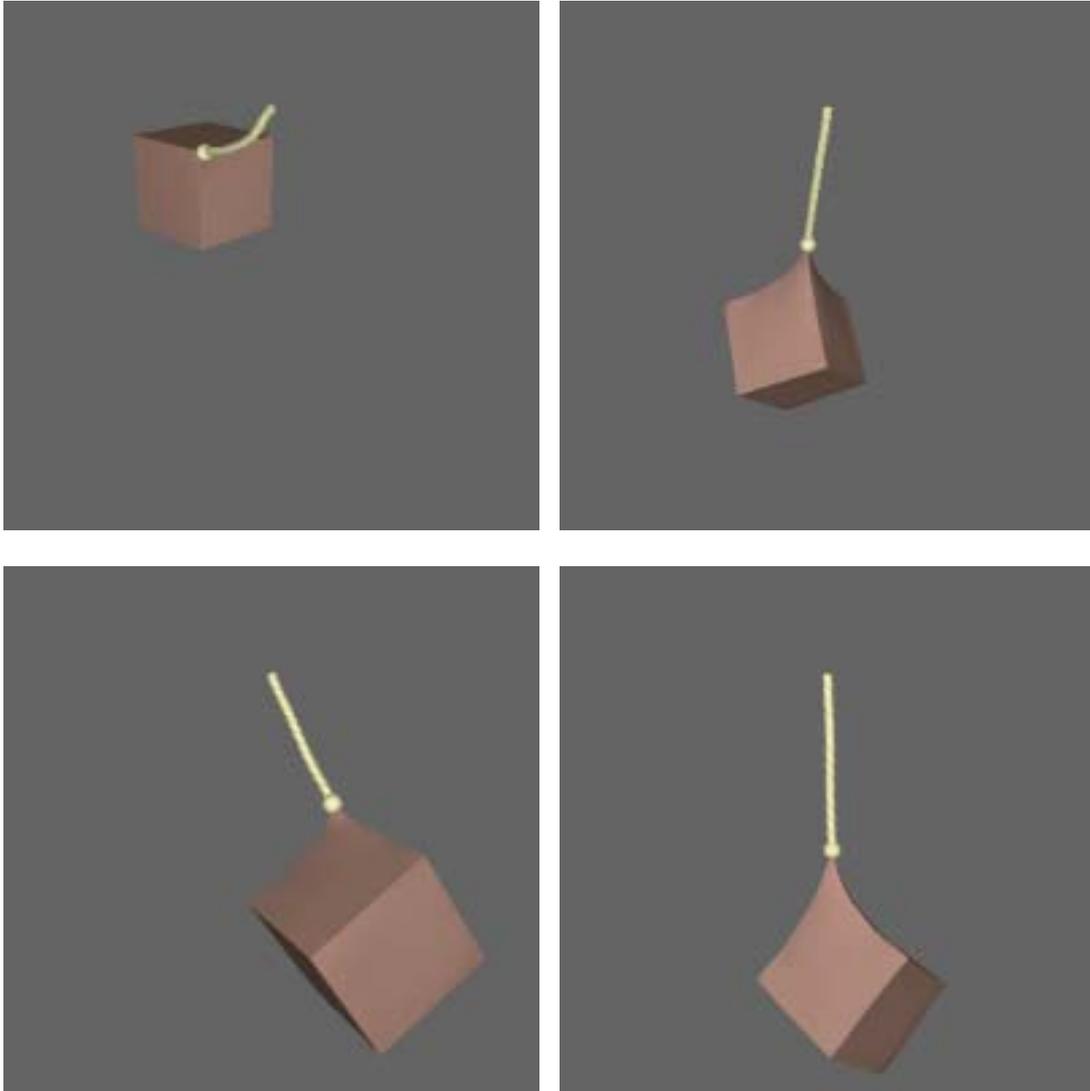


Figure 44 Images issues d'une animation reproduisant le mouvement d'un cube déformable suspendu par un de ses coins au bout d'une corde.

4.3 Balançoire

Ce dernier exemple rassemble les trois natures de corps déformables actuellement implantés dans le moteur d'animation dynamique. En effet, la balançoire est composée de :

- 4 cordes modélisées à partir de courbes splines cubiques de Catmull-Rom, composées de 7 points de contrôle et de 4 segments splines. Elles sont dotées de 2 ressorts par segment pour modéliser les efforts internes d'élasticité.

- Un dossier modélisé par une variété spline cubique d'Hermitte de dimension 2, constituée de (5,5) points de contrôle et de (2,2) sous-variétés. Elle est aussi dotée de ressorts, au nombre de (2,2) par sous-variété.
- Un siège modélisé par une variété spline cubique d'Hermitte de dimension 3, constituée de (6,5,4) points de contrôle et de (3,2,1) sous-variétés, dotée de (2,2,2) ressorts par sous-variété.

Des contraintes de distance sont imposées entre les quatre extrémités inférieures des cordes et les quatre coins supérieurs du siège. Des contraintes de même nature sont imposées aux quatre coins du dossier pour qu'il demeure fixé aux cordes. Enfin, quatre contraintes de point fixe sont appliquées aux extrémités supérieures des cordes pour les attacher à la structure qui n'est pas un système matériel mais un objet inerte de l'environnement.

Les éléments de la balançoire sont uniquement soumis aux efforts de gravité, d'amortissement et d'élasticité interne (Figure 45).

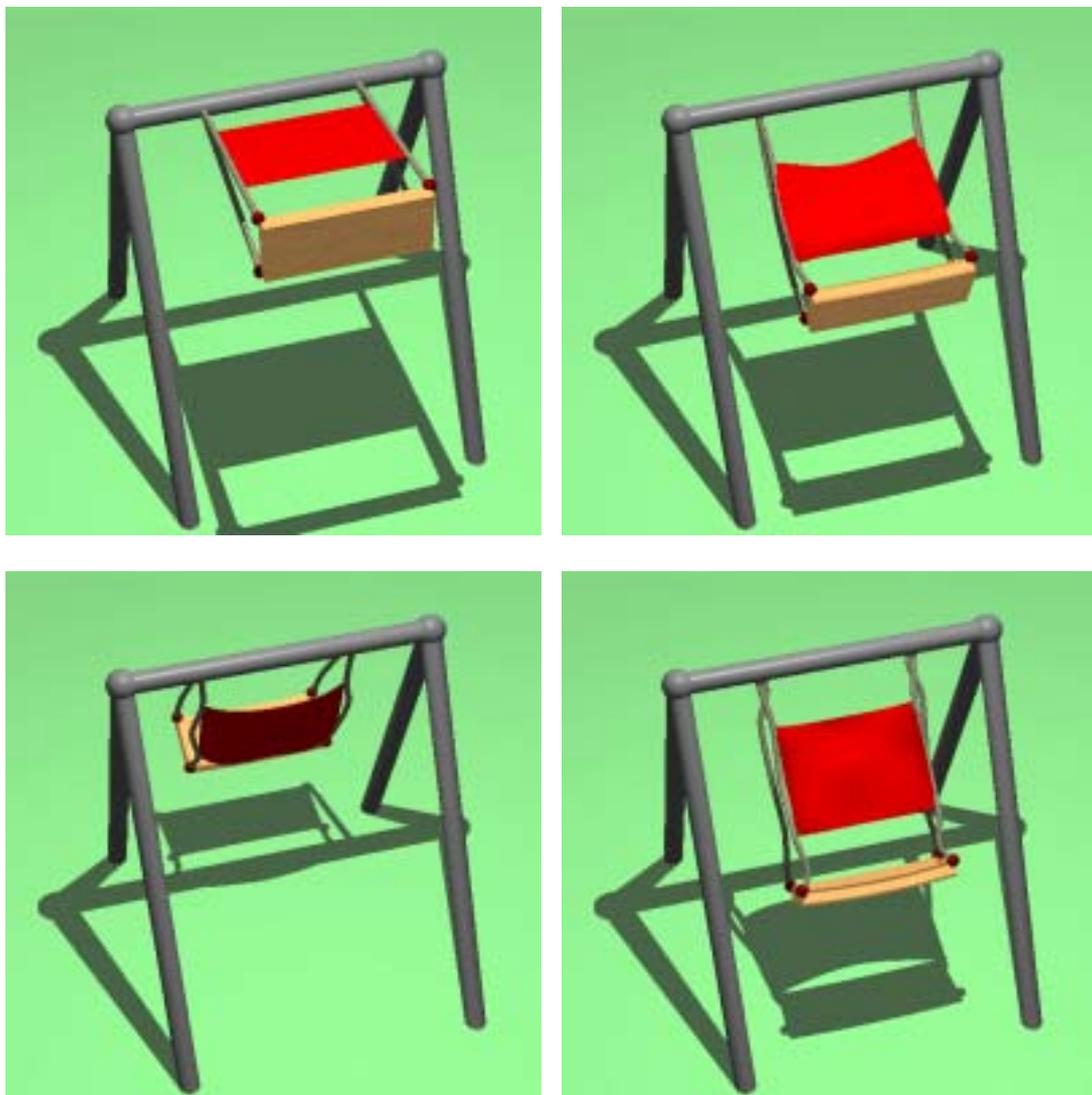


Figure 45 Images issues d'une animation reproduisant le mouvement d'une balançoire.

ENERGIE CONTINUE DE DEFORMATION DES VARIETES SPLINES

1 Introduction

Jusqu'à présent, pour modéliser l'élasticité interne d'une variété spline, j'utilisais des ressorts attachés en des points caractéristiques constituant un réseau discret au sein de la variété. Bien que les modèles masses-ressorts, toujours populaires, présentent certains avantages [Baraff 1998] [Bourguignon 2000] [Volino 2000], je souhaitais uniformiser le modèle mécanique continu en introduisant une représentation continue des efforts internes d'élasticité. Je me suis alors orienté vers la définition d'une énergie continue de déformation conforme à la théorie de l'élasticité. Dans la mesure où les corps déformables que je cherche à animer peuvent être sujets à de grands déplacements, je me positionne hors du champ d'application des résultats de l'élasticité linéaire, abondamment utilisés en animation dynamique [Gourret 1989] [Collier 1991] [Eischen 1996] [Bro-Nielsen 1996]. En effet, la linéarité des contraintes vis-à-vis des déformations garantit une efficacité calculatoire permettant d'envisager des applications temps-réel [Cotin 1997] mais restreintes à l'animation de corps déformables soumis à de petits déplacements. J'ai alors dirigé mes recherches vers la théorie de l'élasticité non linéaire et plus particulièrement, vers le modèle de St Venant-Kirchhoff. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale au 12th Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation [Nocent 2001c].

Je commence par une synthèse des définitions et résultats majeurs de la théorie de l'élasticité en déplacements finis. Pour de plus amples détails, j'invite le lecteur à consulter les ouvrages de Ciarlet [Ciarlet 1986] et Souchet [Souchet 2001] ainsi que les précieux polycopiés de cours de Garrigues [Garrigues 2000a, 2000b]. J'expose ensuite la manière dont j'applique ces résultats théoriques au cas particulier des variétés splines. Je tiens à mentionner que ce travail s'inscrit dans un projet à long terme visant à tirer parti des nombreux résultats de la théorie l'élasticité pour l'animation dynamique des variétés splines de dimension quelconque. Ainsi, les résultats d'ores et déjà disponibles consistent en une première approche restreinte à la modélisation du comportement purement élastique des courbes splines. Cette restriction provient en fait des considérations pragmatiques dictées par le cadre applicatif qui me concerne, à savoir la

simulation de fils tricotés. Enfin, je présente quelques résultats numériques afin de motiver le choix d'une modélisation continue des contraintes internes plutôt qu'une modélisation discrète à base de ressorts.

2 Théorie de l'élasticité

La mécanique des milieux continus permet, entre autres, de décrire l'évolution des déformations d'un corps déformable soumis à des contraintes internes et externes. La relation entre déformations et contraintes internes peut prendre des formes multiples telles que l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité et bien d'autres encore. Comme je l'ai justifié dans l'introduction, je choisis de restreindre, dans cette première approche, mon étude à la modélisation de l'élasticité. La théorie de l'élasticité repose en fait sur les hypothèses suivantes :

- Les déformations subies par le milieu déformable sont supposées réversibles.
- Les contraintes internes générées par les changements de forme du corps sont fonction des déformations.

Pour être en mesure d'utiliser les résultats de la théorie de l'élasticité, il me faut préciser les définitions de notions telles que les **déformations**, les **contraintes internes** et d'enfin expliciter la relation qui les lie : cette relation porte le nom de **loi de comportement**.

2.1 Déformations

On distingue classiquement deux approches distinctes en mécanique des milieux continus :

- La description **eulérienne** qui s'appuie sur l'étude du champ de vitesses instantanées exprimant au cours du temps et en tout point \mathbf{p} de l'espace, la vitesse de la particule occupant la position \mathbf{p} en cet instant (on ignore d'ailleurs de quelle particule il s'agit)
- La description **lagrangienne** qui s'appuie sur l'étude des trajectoires particulières en supposant l'existence d'une configuration de référence qui permet une identification de chacune des particules.

Dans le même état d'esprit, une quantité scalaire, vectorielle ou tensorielle est qualifiée d'**eulérienne** si elle est fonction d'un champ de vitesses instantanées. Et cette même quantité est qualifiée de **lagrangienne** si elle est fonction de l'identifiant particulière et du temps.

Conformément aux choix théoriques que j'ai été amené à opérer préalablement (Chapitre 1 : Justification des équations de Lagrange), je privilégie une approche lagrangienne pour la description des déformations.

2.1.1 Déformations en description lagrangienne

Pour une description lagrangienne du mouvement, chaque particule constitutive du système matériel est identifiée par sa position \mathbf{x}^0 dans une configuration de référence. Ainsi, la position temporelle $\mathbf{x}(t)$ de cette particule est fonction de sa position \mathbf{x}^0 dans la configuration de référence et du temps t .

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.52)$$

Les coordonnées de la position de référence $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}^3$ et le temps $t \in \mathbb{R}$ sont communément appelés les **variables de Lagrange**, tandis que les coordonnées de la position instantanée $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ de la particule sont appelées les **inconnues de Lagrange**.

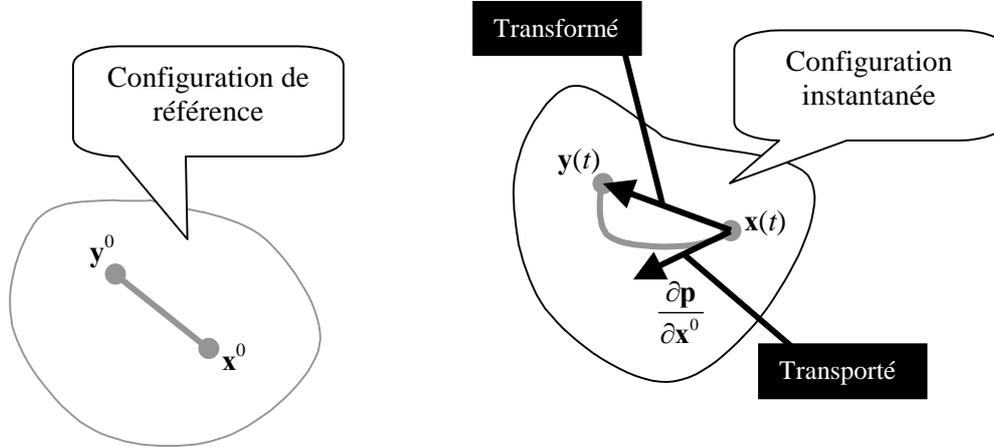


Figure 46 Interprétation géométrique du transformé et du transporté.

L'étude de la déformation d'un milieu continu consiste à comparer les positions particulières dans la configuration instantanée avec les positions des mêmes particules dans la configuration de référence. Cette idée est mathématiquement formalisée par l'équation (2.53) en considérant deux particules identifiées par \mathbf{x}^0 et \mathbf{y}^0 voisines dans la configuration de référence (Figure 46).

$$\underbrace{\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)}_{\text{transformé de } \mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0} = \mathbf{p}(\mathbf{y}^0, t) - \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t) = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t)(\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0)}_{\text{transporté de } \mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0} + \|\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0\| R(\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0, t) \quad (2.53)$$

le terme $R(\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0, t)$ correspond au reste du développement de Taylor.

Le **transformé** est le vecteur liant les positions instantanées des particules identifiées par \mathbf{x}^0 et \mathbf{y}^0 . Le **transporté** est le vecteur tangent à l'arc de courbe constitué par les positions instantanées des particules appartenant au segment délimité par \mathbf{x}^0 et \mathbf{y}^0 dans la configuration de référence. Pour des particules \mathbf{x}^0 et \mathbf{y}^0 suffisamment proches, le transformé et le transporté sont confondus, faisant de la jacobienne de la position temporelle l'élément qui relie une direction de la configuration de référence avec la direction « déformée » correspondante de la configuration instantanée.

On définit alors $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$, le **tenseur gradient de la transformation** (i.e. transformation linéaire tangente) de la façon suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) = \text{grad}_{\mathbf{x}^0} \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.54)$$

Le tenseur gradient de la transformation $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$ exprime, dans la configuration instantanée, la direction d'une fibre matérielle autour de la particule \mathbf{x}^0 à partir de la direction de cette même fibre dans la configuration de référence (Figure 47).

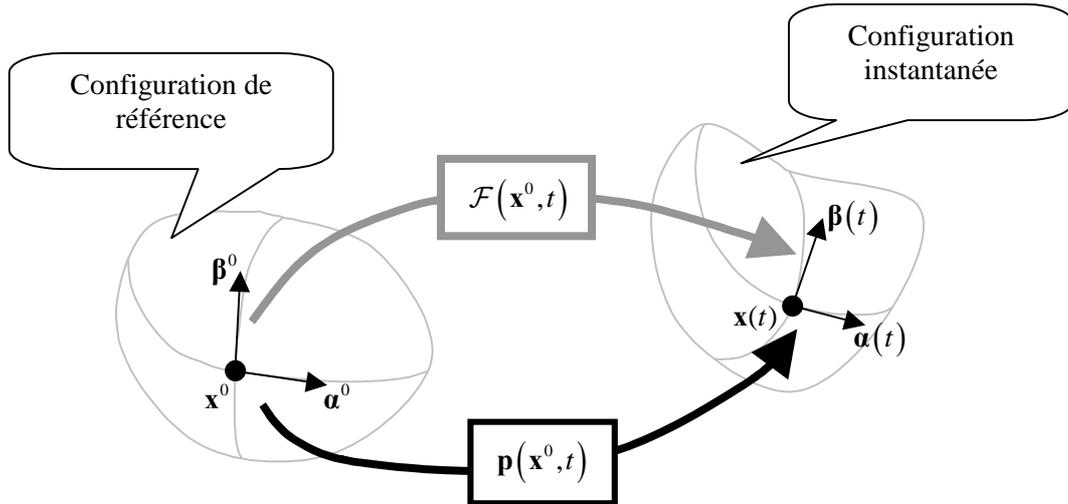


Figure 47 Interprétation géométrique du tenseur gradient de la transformation.

La dilatation d'une fibre matérielle ou le glissement de deux directions de fibres matérielles $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ est caractérisé par leur produit scalaire de $\alpha(t) \cdot \beta(t)$. Si l'on considère que $\alpha(t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)\alpha^0$ et $\beta(t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)\beta^0$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \alpha(t) \cdot \beta(t) &= (\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)\alpha^0)^T (\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)\beta^0) \\ &= \alpha^{0T} \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)\beta^0 \\ &= \alpha^{0T} \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)\beta^0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) \end{aligned} \quad (2.55)$$

le tenseur de **Cauchy-Green** $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)$ est le tenseur des dilatations. En effet, il permet d'exprimer la dilatation et le glissement, au voisinage de la particule \mathbf{x}^0 dans la configuration instantanée, de deux directions unitaires orthogonales α^0 et β^0 de la configuration de référence.

Dilatation dans la direction unitaire α^0 :

$$\lambda(\mathbf{x}^0, t)(\alpha^0) = \sqrt{\alpha^{0T} \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)\alpha^0} \quad (2.56)$$

Glissement de deux directions unitaires orthogonales α^0 et β^0 :

$$\theta(\mathbf{x}^0, t)(\alpha^0, \beta^0) = \arccos \left(\frac{\alpha^{0T} \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)\beta^0}{\lambda(\mathbf{x}^0, t)(\alpha^0)\lambda(\mathbf{x}^0, t)(\beta^0)} \right) \quad (2.57)$$

Le tenseur de Cauchy-Green est un **tenseur lagrangien** puisqu'il est fonction de l'identifiant \mathbf{x}^0 de la particule dans la configuration de référence et du temps t .

Finalement, la déformation autour de la particule \mathbf{x}^0 dans la configuration instantanée est déterminée par la différence $\alpha(t) \cdot \beta(t) - \alpha^0 \cdot \beta^0$.

S'appuyant sur l'équation (2.55), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t) - \boldsymbol{\alpha}^0 \cdot \boldsymbol{\beta}^0 &= \boldsymbol{\alpha}^{0T} \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) \boldsymbol{\beta}^0 - \boldsymbol{\alpha}^{0T} \mathcal{I} \boldsymbol{\beta}^0 \\
 &= \boldsymbol{\alpha}^{0T} (\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) - \mathcal{I}) \boldsymbol{\beta}^0 \\
 &= \boldsymbol{\alpha}^{0T} 2\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) \boldsymbol{\beta}^0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{1}{2} (\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) - \mathcal{I})
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

\mathcal{I} est le tenseur identité.

le tenseur de **Green-Lagrange** $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ est le tenseur des déformations. Tout comme le tenseur de Cauchy-Green, le tenseur de Green-Lagrange est un tenseur lagrangien. Ce tenseur est sensible aux variations de forme du système matériel mais il est invariant par transformation rigide (i.e. transformation isométrique). En effet, si l'on considère une fonction de position temporelle isométrique, on a :

$$\forall \boldsymbol{\alpha}^0, \boldsymbol{\beta}^0 : \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}^0 \cdot \boldsymbol{\beta}^0 \Rightarrow \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) = 0 \tag{2.59}$$

2.1.2 Elasticité linéaire

Au lieu de caractériser la déformation à partir de la position $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t)$ qu'une particule \mathbf{x}^0 occupe à l'instant t , on peut choisir de la caractériser par son déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t)$ depuis sa position de référence. On définit le **déplacement** d'une particule de la façon suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t) - \mathbf{x}^0 \tag{2.60}$$

L'expression du tenseur gradient de transformation $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$ devient alors :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t)) = \mathcal{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \tag{2.61}$$

En s'appuyant sur l'équation (2.61), on peut donner une nouvelle formulation du tenseur de Green-Lagrange à partir du déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}^0, t)$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) &= \frac{1}{2} (\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) - \mathcal{I}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\mathcal{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \right)^T \left(\mathcal{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \right) - \mathcal{I} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \right)
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) &= \epsilon(\mathbf{x}^0, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \\ \text{avec } \epsilon(\mathbf{x}^0, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t)^T + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^0}(\mathbf{x}^0, t) \right)\end{aligned}\quad (2.63)$$

Le tenseur de **Cauchy** $\epsilon(\mathbf{x}^0, t)$ correspond à la partie linéaire du tenseur de Green-Lagrange $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$. Dans le cadre des petits déplacements, le tenseur de Cauchy constitue une approximation tout à fait satisfaisante du tenseur de Green-Lagrange. La nature linéaire du tenseur de Cauchy garantit une plus grande rapidité dans son évaluation, justifiant son succès par rapport au tenseur de Green-Lagrange.

Sous cette hypothèse des petits déplacements où $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}^0$, le tenseur $\epsilon(\mathbf{x}^0, t)$ de Cauchy pourtant de nature lagrangienne peut être perçu comme un tenseur eulerien.

Alors que le tenseur de Green-Lagrange est invariant par transformation rigide, le tenseur de Cauchy quant à lui ne l'est pas. Cette propriété restreint donc le champ d'utilisation du tenseur de Cauchy à des systèmes matériels soumis à des petits déplacements autour de la configuration de référence. Des tentatives d'utilisation de ce tenseur pour des systèmes matériels sujets à des déplacements finis se révèlent infructueuses comme l'ont démontré Debonne [Debonne 2000] et Picinbono [Picinbono 2001].

3 Contraintes

Les contraintes correspondent aux efforts appliqués au sein du corps déformable en réponse à sa déformation. Pour un découpage arbitraire du corps Ω en deux sous-corps Ω_1, Ω_2 séparés par la frontière $\partial\Omega$, les efforts appliqués par Ω_1 à Ω_2 sur un élément surfacique infinitésimal dS de la frontière $\partial\Omega$, au voisinage d'un point matériel $\mathbf{x}(t)$, peuvent être déduits de la normale \mathbf{n} à cette surface. Ils sont classiquement mesurés par le **tenseur des contraintes de Cauchy** qui, pour une position $\mathbf{x}(t)$ de la configuration instantanée, permet de déterminer l'effort $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ appliqué à un petit élément de surface dS autour de $\mathbf{x}(t)$ à partir de sa normale \mathbf{n} (Figure 48). Plus synthétiquement, on peut écrire :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \sigma(\mathbf{x}(t)) \mathbf{n} dS \quad (2.64)$$

Le tenseur $\sigma(\mathbf{x}(t))$ des contraintes de Cauchy est de **nature eulerienne** dans la mesure où il dépend d'une position de la configuration instantanée sans considération d'identification particulière et qu'il s'applique à une normale de la configuration instantanée.

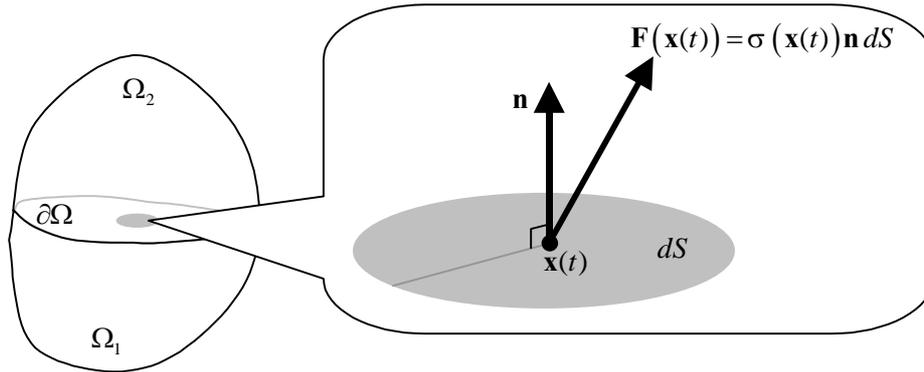


Figure 48 Interprétation géométrique du tenseur des contraintes de Cauchy.

Puisque j’ai caractérisé les déformations d’un milieu continu à l’aide de tenseurs lagrangiens, j’ai recours à la transformée de Piola [Ciarlet 1986] [Garrigues 2000b] afin de déduire l’expression d’un tenseur de pseudo-contraintes lagrangien. Ce tenseur $S(\mathbf{x}^0, t)$ déduit de la transformée de Piola du tenseur des contraintes de Cauchy porte le nom de **premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**.

$$S(\mathbf{x}^0, t) = \det(\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) \sigma(\mathbf{x}(t)) (\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T)^{-1} \quad \text{avec } \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.65)$$

Afin de satisfaire à la contrainte de symétrie des tenseurs de déformations et de contraintes, on définit le **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff** de la manière suivante :

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^{-1} S(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.66)$$

4 Loi de comportement

La loi de comportement permet d’établir le lien entre le tenseur des déformations et le tenseur des contraintes internes issues des modifications de forme du milieu continu. Il apparaît clairement que la nature ainsi que les propriétés structurales du matériau considéré conditionnent fortement l’expression de la loi de comportement. Je vais donc énumérer plusieurs types de matériaux en donnant pour chacun d’eux la forme de la loi de comportement associée. Je m’attarderai plus particulièrement sur les matériaux de St Venant-Kirchhoff dont la loi de comportement, en dépit de sa simplicité, est tout à fait adaptée à mon besoin d’une réponse non linéaire des fils du tricot.

4.1 Matériaux élastiques

Un matériau est **élastique** si le tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$ dépend uniquement de la position \mathbf{x}^0 de la particule et du tenseur gradient de la transformation $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$. Cela équivaut à dire qu’il existe une application $\hat{\Sigma} : \Omega \times M_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t) = \hat{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) \quad (2.67)$$

Pour un matériau élastique, le tenseur des contraintes ne dépend donc que des dérivées premières de la fonction de position. Parmi les matériaux élastiques, on distingue une sous-

famille particulière de matériaux qualifiés d'homogènes. Un matériau élastique est **homogène** si le tenseur des contraintes est indépendant du point considéré. De manière équivalente, il existe une application $\hat{\Sigma} : M_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t) = \hat{\Sigma}(\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) \quad (2.68)$$

Un principe général en physique affirme que toute quantité observable de nature intrinsèque doit être indépendante de la base orthonormée dans laquelle elle est calculée. Ce principe m'amène à formuler l'axiome suivant.

Axiome de l'indifférence matérielle [Ciarlet 1986] [Souchet 2001]

Le vecteur des contraintes doit être indépendant de la base orthonormée choisie pour calculer le tenseur des contraintes à l'aide de la réponse du matériau

Une conséquence de cet axiome consiste à dire que l'on peut exprimer le tenseur des contraintes comme une fonction du tenseur de Cauchy-Green $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)$. En effet, le tenseur $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)$ correspond au tenseur des dilatations dont les valeurs sont indépendantes de la base orthonormée dans laquelle il est exprimé. On définit alors une application $\tilde{\Sigma} : \Omega \times S_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow S_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation suivante :

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) \quad (2.69)$$

4.2 Matériaux élastiques isotropes

Un matériau élastique est **isotrope** si le tenseur des contraintes est invariant par rotation, c'est-à-dire :

$$\hat{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)) = \hat{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) R) \quad \forall R \in O_3(\mathbb{R}) \quad (2.70)$$

Cette condition signifie que la réponse du matériau est identique dans toutes les directions autour de la particule identifiée par \mathbf{x}^0 . A partir de cette hypothèse, le théorème de représentation de Rivlin-Erickson [Ciarlet 1986] permet de déduire l'expression générale de la loi de comportement associée à un matériau élastique isotrope.

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= \beta_1(l_c) \mathcal{I} + \beta_2(l_c) \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) + \beta_3(l_c) \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)^2 \\ \text{où } l_c &= (l_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)), l_2(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)), l_3(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t))) \end{aligned} \quad (2.71)$$

β_1, β_2 et β_3 sont des fonctions à valeurs réelles, le vecteur l_c est composé des **invariants principaux** du tenseur de dilatation de Cauchy-Green. L'expression de ces invariants principaux est donnée dans l'équation (2.72).

$$\begin{aligned} l_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= \text{tr } \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) \\ l_2(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr } \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t))^2 - \text{tr } \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)^2 \right\} \\ l_3(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= \det \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.72)$$

En exploitant la relation $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{I} + 2\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$, on donne une expression des invariants principaux de $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)$ en fonction du tenseur de Green-Lagrange $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$.

$$\begin{aligned} I_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= 3 + 2\text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) \\ I_2(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= 3 + 4\text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) + 2\left\{ \left(\text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) \right)^2 - \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)^2 \right\} \\ I_3(\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) &= \det(2\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) + \mathcal{I}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Ainsi, la décomposition de la loi de comportement d'un matériau élastique isotrope énoncée en (2.71) devient :

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{x}^0, \mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)) = -\pi(\mathbf{x}^0)\mathcal{I} + \lambda(\mathbf{x}^0)(\text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t))\mathcal{I} + 2\mu(\mathbf{x}^0)\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) + o(\mathcal{E}^2(\mathbf{x}^0, t), \mathbf{x}^0) \quad (2.74)$$

où π , λ et μ sont des fonctions de la position \mathbf{x}^0 dans la configuration de référence, caractéristiques du matériau. Dans le cas particulier d'un **matériau élastique homogène isotrope**, ces fonctions deviennent invariantes. On définit alors une nouvelle loi de comportement $\tilde{\Sigma}: S_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow S_3(\mathbb{R})$ fonction du tenseur des déformations $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ et de deux scalaires λ et μ .

$$\tilde{\Sigma}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) = \tilde{\Sigma}(\mathcal{I} + 2\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) = \lambda \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)\mathcal{I} + 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) + o(\mathcal{E}^2(\mathbf{x}^0, t)) \quad (2.75)$$

Les grandeurs scalaires λ et μ sont les **constantes de Lamé**. Ces deux grandeurs caractérisent les propriétés du matériau et peuvent être déduites de l'expression du **module de Young** E et du **coefficient de Poisson** ν par l'équation suivante :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.76)$$

4.3 Matériaux de St Venant-Kirchhoff

Un **matériau de St Venant-Kirchhoff** est un matériau élastique homogène isotrope dont la loi de comportement correspond à la partie linéaire en $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ de (2.75)

$$\tilde{\Sigma}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) = \tilde{\Sigma}(\mathcal{I} + 2\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) = \lambda \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)\mathcal{I} + 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.77)$$

A ce titre, les matériaux de St Venant-Kirchhoff sont, dans le cadre de l'élasticité en déplacements finis, les matériaux les plus étudiés.

4.4 Matériaux hyper élastiques

Un matériau est **hyper élastique** s'il existe une fonction d'énergie potentielle de déformation dont le tenseur des contraintes dérive. Dans le cadre d'une description lagrangienne des déformations et des contraintes, on considère une énergie potentielle $e(\mathbf{x}^0, t)$ dont le second tenseur de Piola-Kirchhoff (2.66) dérive.

Ainsi,

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\partial e}{\partial \mathcal{E}}(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.78)$$

\mathcal{E} représente le tenseur des déformations.

On définit alors l'**énergie totale de déformation** en sommant les contributions des énergies de déformations $e(\mathbf{x}^0, t)$ pour toutes les particules \mathbf{x}^0 du domaine Ω^0 que constitue le milieu continu dans sa configuration de référence.

$$e^{\text{totale}}(t) = \int_{\Omega^0} e(\mathbf{x}^0, t) d\mathbf{x}^0 \quad (2.79)$$

A noter qu'un **matériau de St Venant-Kirchhoff est un matériau hyper élastique**. A partir de l'expression du tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$ donnée en (2.77), on déduit aisément l'expression de l'énergie potentielle de déformation.

$$e(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t))^2 + \mu \text{tr}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t))^2 \quad (2.80)$$

L'énergie potentielle de déformation pour un matériau de St Venant-Kirchhoff peut aussi être obtenue à partir du produit contracté du tenseur des déformations $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ et du tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$.

$$e(\mathbf{x}^0, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) : \Sigma(\mathbf{x}^0, t) \quad (2.81)$$

La loi de comportement associée à un matériau de St Venant-Kirchhoff, de nature lagrangienne puisqu'elle lie le tenseur de Green-Lagrange et le second tenseur de Piola-Kirchhoff, permet de calculer les contraintes internes imposées à un milieu continu à partir de ses déformations. Elle demeure valable pour des corps matériels sujets à des déplacements finis dans la mesure où le tenseur de Green-Lagrange est invariant par transformation rigide et donc seulement sensible aux changements de forme du corps.

4.5 Loi de Hooke

La loi de Hooke est similaire à la loi de comportement d'un matériau de St Venant-Kirchhoff à ceci près que le tenseur de déformations considéré est le tenseur $\epsilon(\mathbf{x}^0, t)$ de Cauchy (2.63). Cette loi de comportement est donc restreinte à l'étude des corps matériels sujets à des petits déplacements. Dans ce cas de figure, où la position instantanée est presque confondue avec la position de référence, le tenseur de Cauchy est considéré comme une quantité eulerienne. Le tenseur de contraintes déduit de cette expression de la déformation n'est autre que le tenseur des contraintes de Cauchy (2.64).

On a alors :

$$\sigma(\mathbf{x}(t)) = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(\mathbf{x}(t))) \mathcal{I} + 2\mu \epsilon(\mathbf{x}(t)) \quad (2.82)$$

5 Application aux courbes splines matérielles

Une courbe spline matérielle est un système mécanique curviligne sans épaisseur. Cette hypothèse mathématique consistant en une idéalisation du phénomène réel conduit à construire des objets sans aucune existence physique. Afin de pouvoir utiliser les résultats précédents, qui reposent sur la nature volumique du milieu continu, il me faut considérer désormais des courbes splines matérielles dotées d'une épaisseur infinitésimale. Ainsi on considère, autour de chaque point de la courbe, une section matérielle orthogonale à la courbe dans sa configuration de référence. On suppose de plus que cette section demeure orthogonale à la courbe en tout instant t et ne subit que des déformations de nature elliptique. Ces hypothèses semblent raisonnables dans la mesure où l'épaisseur de la courbe, et donc le rayon moyen de la section, sont supposés négligeables. Autour de chaque point de la courbe de position $\mathbf{p}(j, \omega, t)$, on construit un référentiel orthonormal $(\mathbf{u}^1(j, \omega, t), \mathbf{u}^2(j, \omega, t), \mathbf{u}^3(j, \omega, t))$ de sorte que son premier axe $\mathbf{u}^1(j, \omega, t)$ soit tangent à la courbe, c'est-à-dire que les vecteurs $\mathbf{u}^1(j, \omega, t)$ et $\partial_{\omega} \mathbf{p}(j, \omega, t)$ soient colinéaires (Figure 49).

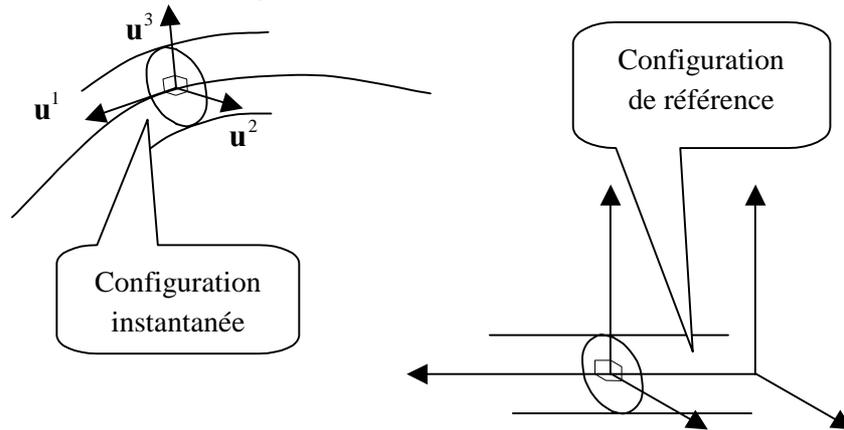


Figure 49 Section d'une courbe spline matérielle avec son référentiel associé

Finalement, la position d'un point matériel au sein de cette courbe spline matérielle avec épaisseur, identifiée par un numéro de segment j et un multi-indice $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est donnée par:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(j, \omega_1, t) + \omega_2 a_2(j, \omega_1) \mathbf{u}^2(j, \omega_1, t) + \omega_3 a_3(j, \omega_1) \mathbf{u}^3(j, \omega_1, t) \quad (2.83)$$

Les termes $a_2(j, \omega_1)$ et $a_3(j, \omega_1)$ représentent respectivement les facteurs de dilatation linéaire au sein de la section matérielle dans les directions $\mathbf{u}^2(j, \omega_1, t)$ et $\mathbf{u}^3(j, \omega_1, t)$. Ces facteurs permettent la modélisation des phénomènes de striction dans le plan de la section.

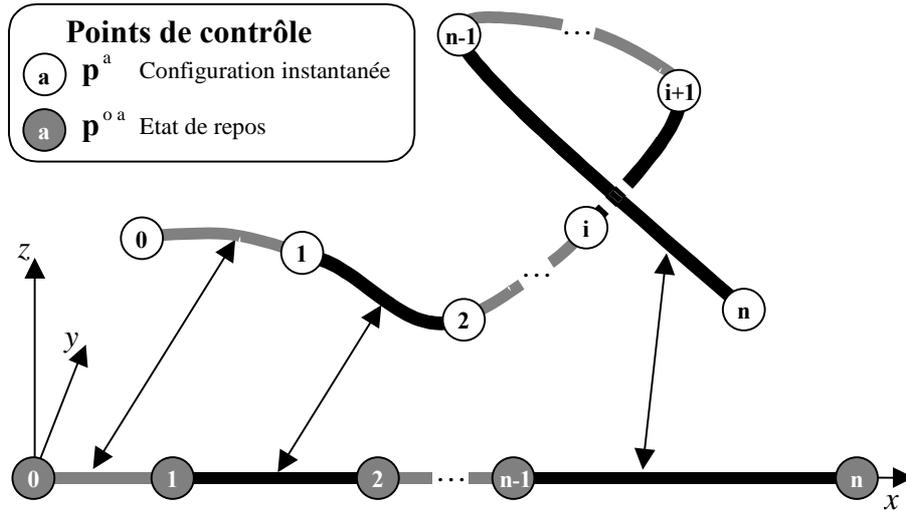


Figure 50 Etat de repos d’une courbe spline matérielle.

La position de référence de chaque particule est obtenue à partir de l’état de repos de la courbe spline matérielle. Cet état de repos correspond à une courbe spline rectiligne, parallèle à l’axe Ox dont les segments ont des longueurs au repos fixées (Figure 50).

$$\mathbf{x}^0 = (\mathbf{p}_1^0(j, \omega_1) \quad \omega_2 \quad \omega_3)^T = \left(\sum_{i=1}^n b_i^j(\omega_1) \mathbf{p}_1^{0i} \quad \omega_2 \quad \omega_3 \right)^T \quad (2.84)$$

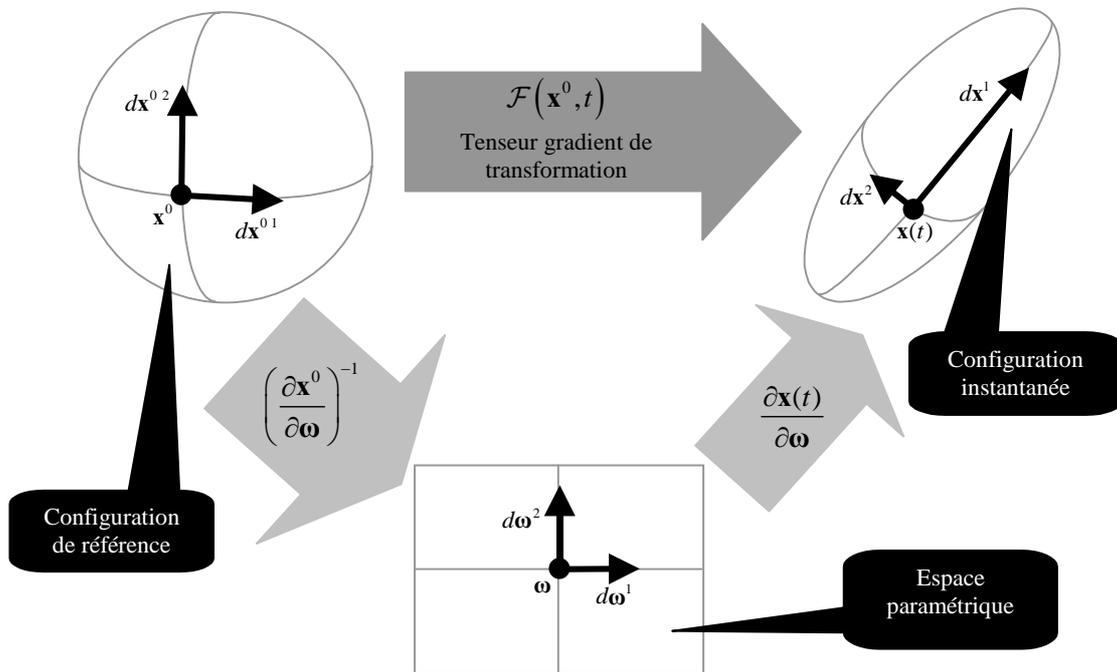


Figure 51 Construction du tenseur gradient de transformation à partir des fonctions paramétriques de position.

Comme dans le modèle de Terzopoulos [Terzopoulos 1987], chaque particule est identifiée par sa coordonnée paramétrique ω et non directement par sa position \mathbf{x}^0 dans la configuration de

référence. Terzopoulos choisit de mesurer la déformation subie par le corps en faisant la différence des tenseurs métriques $G^0(\boldsymbol{\omega})$ et $G(\boldsymbol{\omega}, t)$, quantités exprimées dans l'espace paramétrique donc sans grandeur physique. Pour construire un tenseur gradient de transformation $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$ dont l'expression soit conforme à celle proposée par la théorie de l'élasticité, il faut être en mesure d'exprimer la dérivée partielle de la position instantanée $\mathbf{x}(t)$ par rapport à la position de référence \mathbf{x}^0 . Pour cela, j'introduis l'inverse de la dérivée partielle de \mathbf{x}^0 par rapport à $\boldsymbol{\omega}$ (Figure 51) dans l'expression de $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$. Cet artifice de calcul permet de retomber dans les rails de la théorie de l'élasticité en définissant le tenseur gradient de transformation comme une fonction de la configuration de référence, permettant ainsi d'utiliser d'une manière classique les caractéristiques du matériau comme paramètres naturelles des contraintes internes.

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^0}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(t) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{x}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(t) \left(\frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right)^{-1} \quad (2.85)$$

D'autre part,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(t) = \left(\frac{\partial l}{\partial \omega_1} \mathbf{u}^1 + \omega_2 \frac{\partial (a_2 \mathbf{u}^2)}{\partial \omega_1} + \omega_3 \frac{\partial (a_3 \mathbf{u}^3)}{\partial \omega_1} \quad a_2 \mathbf{u}^2 \quad a_3 \mathbf{u}^3 \right) \quad \text{où} \quad \partial_{\omega_1} l = \|\partial_{\omega_1} \mathbf{p}\| \quad (2.86)$$

En supposant l'épaisseur infinitésimale, les paramètres ω_2 et ω_3 sont négligeables devant $\partial_{\omega_1} l(j, \omega_1, t)$. A partir de maintenant, on considère que $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Par conséquent, les termes définis précédemment ne dépendent désormais plus que d'un seul paramètre scalaire ω (auparavant noté ω_1). Ainsi, l'équation (2.86) se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\omega}}(t) = \left(\frac{\partial l}{\partial \omega_1}(j, \omega, t) \mathbf{u}^1(j, \omega, t) \quad a_2(j, \omega, t) \mathbf{u}^2(j, \omega, t) \quad a_3(j, \omega, t) \mathbf{u}^3(j, \omega, t) \right) \quad (2.87)$$

L'équation (2.87) permet d'aboutir à une forme simplifiée de l'expression du tenseur gradient de la transformation $\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)$, en effet on a :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{U}(j, \omega, t) \mathcal{A}(j, \omega, t)$$

$$\mathcal{U}(j, \omega, t) = \left(\mathbf{u}^1 \quad \mathbf{u}^2 \quad \mathbf{u}^3 \right) \text{ et } \mathcal{A}(j, \omega, t) = \begin{pmatrix} \gamma(j, \omega, t) & & \\ & a_2(j, \omega, t) & \\ & & a_3(j, \omega, t) \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Le scalaire $\gamma(j, \omega, t) = \partial_{\omega} l(j, \omega, t) / \partial_{\omega} l^0(j, \omega)$ exprime le facteur de dilatation relative dans la direction tangente à la courbe spline matérielle. Naturellement, l'expression du tenseur de Cauchy-Green $\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t)$ devient :

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{A}(j, \omega, t)^T \mathcal{U}(j, \omega, t)^T \mathcal{U}(j, \omega, t) \mathcal{A}(j, \omega, t) \quad (2.89)$$

Dans la mesure où la base des vecteurs $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$ est orthonormale et le tenseur $\mathcal{A}(j, \omega, t)$ est diagonal, l'équation (2.89) se simplifie en :

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}^0, t) = \mathcal{A}(j, \omega, t)^T \mathcal{A}(j, \omega, t) = \mathcal{A}(j, \omega, t)^2 \quad (2.90)$$

Finalement, le tenseur de Green-Lagrange $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ est de la forme suivante.

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma(j, \omega, t)^2 - 1 & & \\ & a_2(j, \omega, t)^2 - 1 & \\ & & a_3(j, \omega, t)^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

Les deux facteurs de dilatation radiale $a_2(j, \omega, t)$ et $a_3(j, \omega, t)$ sont inconnus. Deux équations supplémentaires sont donc nécessaires afin de pouvoir expliciter complètement le tenseur des déformations $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ et le tenseur des contraintes $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$ qui en découle.

S'appuyant sur une hypothèse couramment formulée dans la théorie des coques minces, je suppose qu'aucun effort n'est appliqué à la surface de l'objet. La section étant supposée toujours perpendiculaire à la courbe, un vecteur normal \mathbf{n} est forcément de la forme suivante $\mathbf{n} = \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{u}^3$. Conformément à l'hypothèse de nullité des efforts radiaux, on a :

$$\sigma(\mathbf{x}(t), t) \mathbf{n} = 0 \quad \forall \alpha_2, \alpha_3 : \mathbf{n} = \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{u}^3 \quad (2.92)$$

En raison de l'épaisseur infinitésimale de la courbe spline matérielle, la propriété (2.92) peut être étendue à toute particule intérieure. On donne une expression alternative (2.93) du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(\mathbf{x}(t))$, dépendant explicitement du second tenseur de Piola-Kirchhoff, afin d'introduire de nouvelles équations faisant intervenir les coefficients de $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$.

$$\sigma(\mathbf{x}(t)) = \det(\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t))^{-1} \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) \Sigma(\mathbf{x}^0, t) \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T \quad (2.93)$$

L'équation (2.92) devient alors,

$$(\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) \Sigma(\mathbf{x}^0, t) \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T) \mathbf{n} = 0 \quad \forall \alpha_2, \alpha_3 : \mathbf{n} = \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{u}^3 \quad (2.94)$$

En s'appuyant sur la définition du tenseur gradient de transformation d'une variété spline, on développe l'expression de l'équation (2.94) pour aboutir à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}(\mathbf{x}^0, t) \mathcal{A}(\mathbf{x}^0, t) \Sigma(\mathbf{x}^0, t) \mathcal{A}(\mathbf{x}^0, t)^T (\mathcal{U}(\mathbf{x}^0, t)^T \mathbf{n}) = 0 \\ & \text{avec } \mathcal{U}(\mathbf{x}^0, t)^T \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha_2, \alpha_3 : \mathbf{n} = \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \alpha_3 \mathbf{u}^3 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Enfin, puisque les tenseurs $\mathcal{A}(\mathbf{x}^0, t)$ et $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$ sont diagonaux, on débouche sur l'expression simplifiée ci-dessous.

$$\mathcal{A}^2(\mathbf{x}^0, t) \Sigma(\mathbf{x}^0, t) \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \alpha_2 a_2^2 \Sigma_{22} & \\ & & \alpha_3 a_3^2 \Sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha_2, \alpha_3 \quad (2.96)$$

Par conséquent, l'égalité de (2.96) étant vérifiée pour tout α_2, α_3 , on obtient deux nouvelles équations portant sur les coefficients du second tenseur de Piola-Kirchhoff .

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t)_{22} = \Sigma(\mathbf{x}^0, t)_{33} = 0 \quad (2.97)$$

Conformément à la loi de comportement des matériaux de St Venant-Kirchhoff (2.77), les deux équations de (2.97) sont équivalentes à :

$$2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{22} = 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{33} = -\lambda \text{tr}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) \quad (2.98)$$

Après calculs, on débouche sur l'égalité suivante :

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{22} = \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{33} = -\nu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} \quad (2.99)$$

Cette dernière équation permet de donner l'expression définitive du tenseur de Green-Lagrange $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) = \frac{1}{2} (\gamma(j, \omega, t)^2 - 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\nu & \\ & & -\nu \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

Le tenseur $\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)$ présente une caractéristique structurelle très intéressante. En fait, la déformation le long de l'axe \mathbf{u}^1 est couplée avec une déformation radiale dans le plan de la section définie par $(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3)$ pondérée par le coefficient de Poisson ν qui est, en mécanique, la mesure naturelle de la striction.

Le premier terme du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff peut être obtenu grâce à la loi de comportement (2.77).

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{x}^0, t)_{11} &= \lambda \text{tr}(\mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)) + 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} = -2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{22} + 2\mu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} \\ &= 2\mu \left[-(-\nu \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11}) + \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} \right] = \frac{2E}{2(1+\nu)} (1+\nu) \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} \\ &= E \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t)_{11} \end{aligned} \quad (2.101)$$

En définitive,

$$\Sigma(\mathbf{x}^0, t) = \frac{E}{2} (\gamma(j, \omega, t)^2 - 1) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

Tout matériau de St Venant-Kirchhoff étant hyper élastique, je donne l'expression de l'énergie de déformation pour un volume unitaire lagrangien (i.e. exprimé dans la configuration de référence).

$$\begin{aligned} e(\mathbf{x}^0, t) &= \frac{1}{2} \Sigma(\mathbf{x}^0, t) : \mathcal{E}(\mathbf{x}^0, t) \\ &= \frac{E}{2} \mathcal{E}_{11}(\mathbf{x}^0, t)^2 \\ &= \frac{E}{8} (\gamma(j, \omega, t)^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (2.103)$$

L'énergie totale de déformation est obtenue par sommation.

$$e^{\text{totale}}(t) = \int e(\mathbf{x}^0, t) d\mathbf{x}^0 = \iiint e(\mathbf{x}^0, t) dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 \quad (2.104)$$

A l'aide d'un changement de coordonnées approprié relatif à l'état de repos de la courbe spline matérielle,

$$\begin{aligned} x_1^0 &= p_1^0(j, \omega_1), \quad x_2^0 = \omega_2, \quad x_3^0 = \omega_3 \\ dx_1^0 &= \partial_{\omega} l^0(j, \omega_1) d\omega_1, \quad dx_2^0 = d\omega_2, \quad dx_3^0 = d\omega_3 \end{aligned} \quad (2.105)$$

On débouche sur l'expression suivante :

$$\begin{aligned} e^{\text{totale}}(t) &= \sum_{j=1}^{ns} \iiint e(j, \omega_1, t) \partial_{\omega} l^0(j, \omega_1) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \\ &= \sum_{j=1}^{ns} \iint d\omega_2 d\omega_3 \int e(j, \omega_1, t) \partial_{\omega} l^0(j, \omega_1) d\omega_1 \end{aligned} \quad (2.106)$$

On note s la surface de la section infinitésimale supposée constante

$$e^{\text{totale}}(t) = \frac{E s}{8} \sum_{j=1}^{ns} \int (\gamma(j, \omega, t)^2 - 1)^2 \partial_{\omega} l^0(j, \omega) d\omega \quad (2.107)$$

D'une manière différente,

$$e^{\text{totale}}(t) = \frac{Es}{2} \{c_1(t) - c_2(t) + c_3\} \text{ avec}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{ns} \int \frac{\partial_{\omega} l(j, \omega, t)^4}{\partial_{\omega} l^0(j, \omega)^3} d\omega, \quad c_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ns} \int \frac{\partial_{\omega} l(j, \omega, t)^2}{\partial_{\omega} l^0(j, \omega)} d\omega \quad (2.108)$$

$$\text{et } c_3 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{ns} \int \partial_{\omega} l^0(j, \omega) d\omega$$

5.1 Aspects informatiques de l'énergie continue de déformation

Conformément au formalisme lagrangien, les efforts interviennent dans le moteur d'animation dynamique par le biais de leurs puissances virtuelles dans les mouvements virtuels induits par chaque coordonnée généralisée η_i . De plus, si les efforts dérivent d'un potentiel, leurs puissances virtuelles peuvent être directement déduites par dérivation de l'énergie potentielle :

$$Q_i(t) = -\frac{\partial e^{\text{totale}}}{\partial \eta_i}(t) \quad (2.109)$$

Les coordonnées généralisées $\eta_{i+(k-1)n}$ correspondent, pour une courbe spline matérielle, aux coordonnées p_k^i de ses points de contrôle. En s'appuyant sur la définition de l'énergie totale de déformation donnée en (2.108), on déduit l'expression des coordonnées $Q_{i+(k-1)n}(t)$ du vecteur des forces généralisées correspondant aux contraintes internes.

$$Q_{i+(k-1)n}(t) = -\frac{\partial e^{\text{totale}}}{\partial p_k^i}(t) = \frac{Es}{2} \sum_{m=1}^n p_k^m(t) \left[\mathcal{B}_{im} - \sum_{p,q=1}^n \mathcal{B}_{impq} \mathbf{p}^p(t) \cdot \mathbf{p}^q(t) \right] \quad (2.110)$$

ou les termes \mathcal{B}_{impq} et \mathcal{B}_{im} correspondent respectivement à

$$\mathcal{B}_{impq} = \sum_{j=1}^{ns} \int \frac{b_i^{j'}(\omega) b_m^j(\omega) b_p^{j'}(\omega) b_q^j(\omega)}{\partial_{\omega} l^0(j, \omega)^3} d\omega \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{im} = \sum_{j=1}^{ns} \int \frac{b_i^{j'}(\omega) b_m^j(\omega)}{\partial_{\omega} l^0(j, \omega)} d\omega \quad (2.111)$$

Même si l'on considère des fonctions de mélange polynomiales, les scalaires \mathcal{B}_{im} et \mathcal{B}_{impq} sont le résultat de l'intégration d'une fonction rationnelle qui ne peut être a priori calculée de façon exacte. Mais puisque ces termes intégraux sont constants, donc évalués une seule fois durant l'étape d'initialisation, je suis en mesure d'utiliser une méthode d'intégration numérique d'ordre élevé pour en déduire une valeur approchée de précision souhaitée.

En observant l'équation (2.110), le calcul des puissances virtuelles des efforts internes d'élasticité révèle une complexité d'ordre $o(n^4)$, n correspondant au nombre de points de contrôle. Par contre, dans un cadre pratique, nombre de modèles splines vérifient la propriété de localité. Cette propriété garantit que la définition d'un segment spline ne dépend que d'un petit nombre noté δ de points de contrôle consécutifs.

On a alors,

$$b_i^j(\omega) = 0 \quad \text{pour } i \notin \mathfrak{I}^j, 1 \leq j \leq ns, \omega \in [0,1] \quad (2.112)$$

\mathfrak{I}^j est l'ensemble des indices des δ points de contrôle intervenant dans la définition du segment spline j . Il apparaît alors plus judicieux de permuter les sommations afin d'obtenir une expression alternative des puissances virtuelles des efforts internes d'élasticité.

$$Q_{i+(k-1)n}(t) = \frac{Es}{2} \sum_{j \in \mathfrak{I}^{i+}} \sum_{m \in \mathfrak{I}^j} p_k^m(t) \left[\mathcal{B}_{im}^j - \sum_{p,q \in \mathfrak{I}^j} \mathcal{B}_{impq}^j \mathbf{p}^p(t) \cdot \mathbf{p}^q(t) \right] \quad (2.113)$$

où $\mathfrak{I}^{i+} = \{j \in [1, ns] : i \in \mathfrak{I}^j\}$

$$\mathcal{B}_{impq}^j = \int \frac{b_i^{j'}(\omega) b_m^{j'}(\omega) b_p^{j'}(\omega) b_q^{j'}(\omega)}{\partial_\omega l^0(j, \omega)^3} d\omega, \mathcal{B}_{im}^j = \int \frac{b_i^{j'}(\omega) b_m^{j'}(\omega)}{\partial_\omega l^0(j, \omega)} d\omega \quad (2.114)$$

Le calcul des termes de l'équation (2.113) est d'une complexité d'ordre $o(ns \cdot \delta^4)$ si on le réalise à l'aide d'une boucle sur les ns segments j qui renseigne les 3δ coordonnées $Q_{i+(k-1)n}(t)$ (pour $i \in \mathfrak{I}^j$) en supposant que les δ^4 termes \mathcal{B}_{impq}^j et les δ^2 termes \mathcal{B}_{im}^j (pour $i, m, p, q \in \mathfrak{I}^j$) ont été pré-calculés pour chaque segment durant l'étape d'initialisation. Comme le nombre δ est une constante du modèle spline choisi, la complexité effective est de l'ordre de $o(ns) = o(n)$.

5.2 Loi de ressort équivalente

Afin de comparer l'énergie continue de déformation que je propose avec une succession de ressorts répartis le long de la courbe spline matérielle, je dois être en mesure d'exprimer la loi de ressort dont la réponse est équivalente à celle fournie par l'énergie de déformation pour une élongation donnée. Je rappelle l'expression alternative du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(\mathbf{x}(t))$ à partir du second tenseur des pseudo contraintes de Piola-Lagrange $\Sigma(\mathbf{x}^0, t)$.

$$\sigma(\mathbf{x}(t)) = \det(\mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t))^{-1} \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t) : \Sigma(\mathbf{x}^0, t) : \mathcal{F}(\mathbf{x}^0, t)^T \quad (2.115)$$

Si \mathbf{n} est le vecteur normal à un élément de surface infinitésimal dS , la force \mathbf{F} résultante d'une contrainte appliquée à dS est donnée par la relation $\mathbf{F} = dS \sigma \mathbf{n}$. J'applique cette formule dans le cas particulier d'une courbe spline matérielle dont l'aire de la section instantanée est égale à $s' = a_2 a_3 s$ de vecteur normal $\mathbf{n} = \pm \mathbf{u}^1$. Puisque je ne m'intéresse qu'au cas des efforts internes d'élasticité, j'espère trouver une relation entre réponse et vecteur normal de la forme :

$$\lambda \mathbf{u}^1 = \pm s' \sigma \mathbf{u}^1 \quad (2.116)$$

où λ est l'intensité algébrique de la réponse de la contrainte des efforts internes. Des équations (2.88) (2.100) (2.115) et (2.116) on déduit une expression de λ qui répond à cette attente, sous la forme d'un polynôme d'ordre 3, fonction du facteur de dilatation relative γ :

$$\lambda = \pm a_2 a_3 s \mathbf{u}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^1 = \pm \frac{Es}{2} \gamma (\gamma^2 - 1) \quad (2.117)$$

Pour illustrer les développements théoriques aboutissant à la formule (2.117), je propose une expérience statique consistant en une mesure de réaction à la traction. Afin de demeurer statique, cette expérience doit garantir que les efforts internes sont homogènes au sein du système matériel. Cette hypothèse est réalisée en choisissant une gravité nulle et un état de départ homothétique à l'état de repos. De cette manière, les points de contrôle de l'état initial sont déduits de l'état repos par la relation suivante :

$$\mathbf{p}^i(0) = \alpha \mathbf{p}^{0i} \quad (2.118)$$

Cette définition de la position des points de contrôle implique :

$$\mathbf{p}(j, \omega, 0) = \alpha \mathbf{p}^0(j, \omega) \Rightarrow \gamma(j, \omega, 0) = \alpha \quad 1 \leq j \leq ns, \omega \in [0, 1] \quad (2.119)$$

Afin de m'assurer que la courbe spline matérielle demeure fixe dans son état étiré, j'impose deux contraintes de position à ses extrémités. De cette manière, les efforts visant à garantir la réalisation des contraintes imposées aux faces extrêmes de la courbe doivent exactement s'opposer aux contraintes internes appliquées aux mêmes faces. Ces efforts de maintien sont, dans les équations de Lagrange, représentés par deux multiplicateurs de Lagrange notés λ_0, λ_1 . Les valeurs respectives λ_0 et λ_1 correspondent exactement aux intensités des efforts de maintien de chaque contrainte (2.120), fournissant un moyen de mesurer les contraintes internes (opposées aux efforts de maintien) pour une élongation donnée.

$$\lambda_0 = \pm \frac{Es}{2} \gamma (\gamma^2 - 1), \quad \lambda_1 = \mp \frac{Es}{2} \gamma (\gamma^2 - 1) \quad (2.120)$$

Les résultats de cette expérience pour différentes valeurs du facteur d'élongation relative $\gamma - 1$ sont rassemblés et comparés avec la courbe de réponse théorique (2.117) dans le tableau 1.

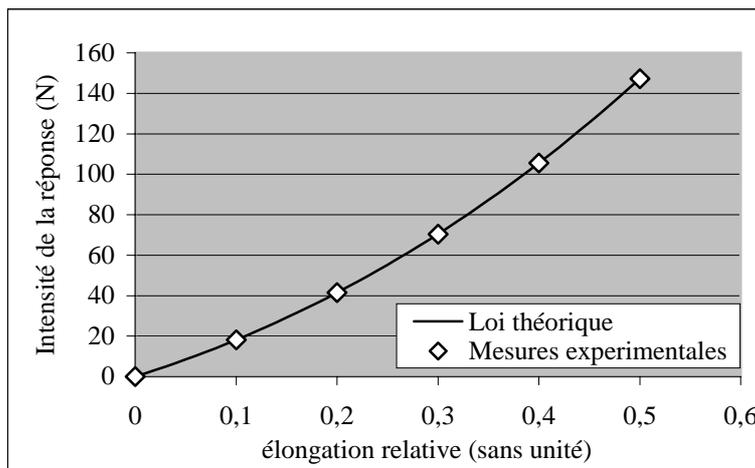


Tableau 1. Résultats de l'expérience de réponse à la traction.

Les précédents développements démontrent clairement que tout segment spline rectiligne doté de cette énergie de déformation se comporte, lors d'une élongation homogène, comme un ressort de loi :

$$f = \frac{1}{2} E s (l/l_0) \left((l/l_0)^2 - 1 \right) \quad (2.121)$$

Par conséquent, si l'on considère qu'un segment spline demeurent, entre deux particules, rectiligne avec une élongation homogène, les contraintes internes issues de l'énergie de déformation peuvent être approchées en attachant un ressort entre ces deux particules dont la loi correspond à l'équation (2.121). Cette hypothèse me permet d'envisager de comparer le mouvement d'une courbe spline avec énergie continue de déformation avec celui d'une courbe munie de ressorts répartis sur sa longueur

5.3 Energie de déformation vs. ressorts

Les tests de comparaison mis en œuvre sont d'une nature relativement simple. En effet, ils consistent en des simulations physiques de courbes splines matérielles dont les seules différences résident dans la nature des efforts internes d'élasticité. Une des cordes utilise une énergie continue de déformation pour modéliser les contraintes internes tandis que les autres sont dotées de ressorts de loi compatible dont le nombre par segments varie selon la courbe spline matérielle.

Le tableau 2 regroupe les résultats de deux expériences illustrées par la Figure 52 et la Figure 53. Le terme « Erreur » correspond à la moyenne par rapport au temps des racines carrés des moyennes des carrés des distances séparant les particules du courbe étudiée et celles de la courbe de référence dotée d'une énergie de déformation. Le « Temps » correspond au temps machine total requis pour calculer une simulation de 5 secondes sur un processeur AMD Athlon 1.2 GHz.

Ces résultats numériques ainsi que les images issues des différentes animations dynamiques révèlent que l'usage de trop peu de ressorts par segment (moins d'une douzaine) entraîne des erreurs inacceptables mais surtout que le modèle s'appuyant sur l'énergie de déformation est d'un coût équivalent à un modèle à base de ressorts dont le nombre garantit seulement une précision moyenne.

Ressorts par segment	Corde fixée à une extrémité		Corde fixée aux deux extrémités	
	Erreur	Temps	Erreur	Temps
2	0.2721 m	2.120s	0.0976 m	4.110s
5	0.0459 m	3.300s	0.0814 m	5.310s
10	0.0234 m	5.290s	0.0825 m	7.280s
15	0.0133 m	7.260s	0.0825 m	9.260s
20	0.0107 m	9.250s	0.0825 m	11.240s
Elasticité continue	-	6.230s	-	8.250s

Tableau 2 Résultats numériques des deux expériences réalisées avec des cordes.

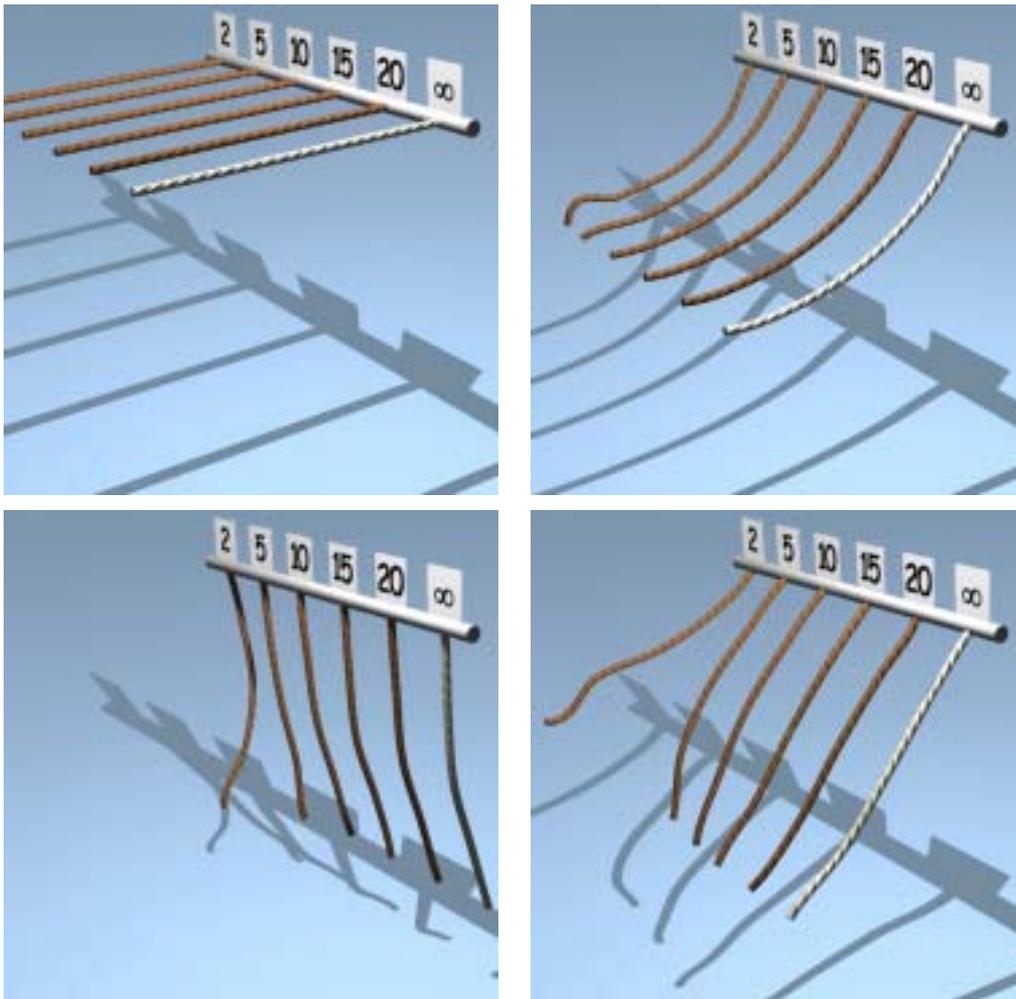


Figure 52 Images issues d'une simulation de cordes suspendues par une de leur extrémité. Les numéros renseignent sur le nombre de ressorts pour chacun des 4 segments, le symbole ∞ désigne la corde d'élasticité continue.

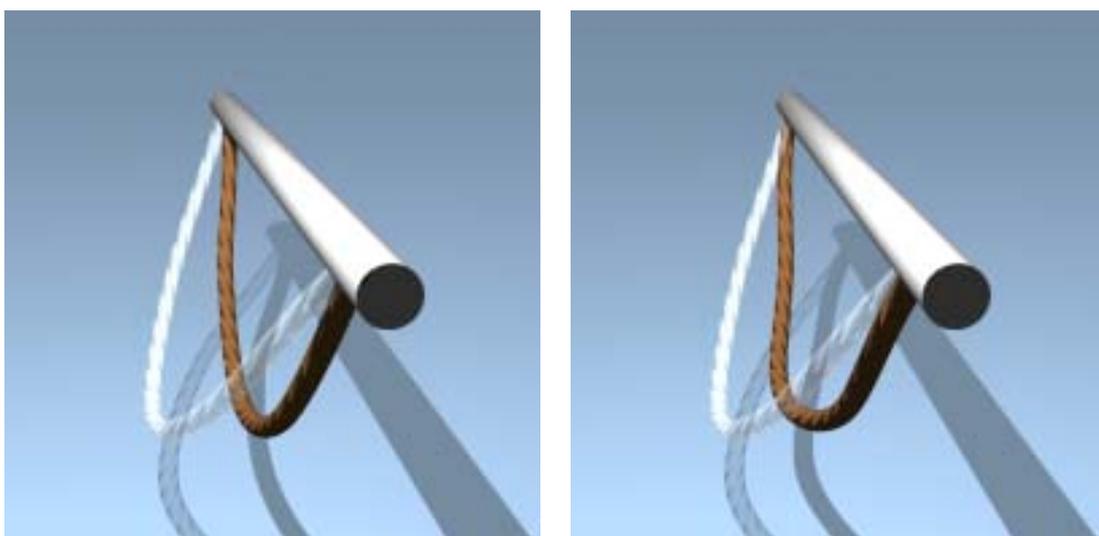


Figure 53 Images issues d'une simulation d'une corde suspendue par ses deux extrémités, la courbe transparente désigne la courbe d'élasticité continue. A gauche, 2 ressorts par segments. A droite, 10 ressorts par segment.

6 Conclusion

La mise en œuvre d'un modèle continu d'élasticité interne a surtout été motivé par cette volonté d'aboutir à la réalisation d'un modèle continu unifié pour représenter des corps déformables. Cette nouvelle étape, sans être l'avènement de ce but, constitue tout de même un grand pas vers un modèle purement continu.

D'autre part, le choix de la théorie de l'élasticité en grands déplacements fournit un cadre théorique pour la description de la déformation qui soit :

- Compatible avec les modèles mécaniques utilisés dans l'industrie. Les paramètres de l'énergie de déformation correspondent aux constantes caractéristiques du matériau issues de mesures expérimentales.
- Non restreint aux petits déplacements, garantissant la robustesse du modèle pour représenter des mouvements de grande amplitude.

Je tiens néanmoins à modérer mon propos. En effet, le travail présenté dans ce chapitre, qui s'inscrit dans une démarche à long terme, constitue mes premiers pas dans la représentation des déformations. Bien que limités aux cas des courbes, les résultats obtenus sont satisfaisants à plusieurs titres. Ce modèle se révèle en fait plus proche de la nature du milieu qu'un modèle à base de ressorts sans pour autant engendrer un surcoût de calcul important.

Le développement théorique suffisamment générique peut naturellement s'étendre au cas des surfaces et des volumes splines. Mais l'accroissement de la complexité combinatoire induit par le passage aux dimensions supérieures m'encourage à envisager une modélisation modulaire des lois de comportement me permettant de choisir l'ordre maximum des termes intervenant dans l'expression de la loi. Cette modularité devrait permettre d'établir un compromis entre richesse de représentation et performance.

REDUCTION DE PARAMETRAGE : APPLICATION AUX TEXTILES TRICOTES

1 Introduction

Par expérience, on constate que l'agencement complexe des mailles joue un rôle important dans le comportement dynamique global d'une pièce d'étoffe tricotée. Cette réflexion a amenée l'équipe d'animation dynamique du LERI à développer un modèle de textiles tricotés [Nourrit 1999] à l'échelle mésoscopique (une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et macroscopique, décrivant le phénomène à l'échelle du fil), contrairement aux modèles dédiés aux textiles tissés dont la structure simple autorise une modélisation à l'échelle macroscopique. Le choix d'un modèle mécanique à l'échelle mésoscopique pour l'étude du mouvement d'un tricot me semble d'une part légitime mais surtout nécessaire. En effet ce modèle, respectueux des propriétés intrinsèques du fil (répartition massique et propriétés élastiques), est par ailleurs seul capable de rendre compte de la complexité structurelle des liages. Ce travail coïncide avec celui entrepris par Meißner et Eberhardt à la même époque [Meißner 1998]. En effet, ils proposent aussi un modèle de tricots à l'échelle mésoscopique en assimilant un fil à une ligne polygonale joignant ce qu'ils appellent les points de déformation qui ne sont rien d'autre que les positions échantillonnées d'application des efforts. Tout comme dans le modèle initial, les efforts d'élasticité interne sont modélisés par des ressorts disposés entre les points de déformation. Ce modèle est utilisé dans un cadre statique pour observer l'état de repos d'une structure tricotée. Cet état de repos est atteint par minimisation d'une énergie modélisant d'une part l'élasticité des fils mais aussi les contraintes visant à préserver la structure tricotée. L'année suivante, Eberhardt et Weber [Eberhardt 1999] envisagent un modèle physique pour l'animation dynamique de tricots en proposant une extension de leur modèle à base de particules, utilisé avec succès pour l'animation de textiles tissés. Ce modèle plus simple permet d'envisager la production d'animations de tricots en des temps raisonnables. Mais reste le problème de l'adéquation du modèle avec la nature fortement non linéaire du comportement des tricots : ils ont alors recours à des courbes de traction-allongement réalisées sur des échantillons de tricots. Cette approche s'éloigne d'une optique de prototypage virtuel dans la mesure où il faut concevoir les échantillons que l'on souhaite simuler. Une autre lacune du modèle proposé réside

dans la réponse au cisaillement et à la flexion. En effet, ne disposant pas de courbes de réponse de cette nature puisque jugées non significatives pour des tricots, ils utilisent des courbes expérimentales issues de tests sur des textiles tissés. Ce choix arbitraire renforce ma conviction d'aborder l'animation dynamique de textiles tricotés par le biais d'un modèle mécanique à l'échelle mésoscopique.

Malheureusement la précision de ce modèle aboutit à des systèmes d'équations de grande taille dont la résolution requiert des temps de calcul prohibitifs, rendant cette approche inadaptée à l'étude du comportement de pièces d'étoffe tricotée de grandes dimensions. Il semble donc primordial d'y apporter des modifications afin de permettre la production d'animations de tricots en des temps de calcul raisonnables. La solution que je propose s'articule autour d'une méthode robuste et générique, devant déboucher à terme sur un modèle à plusieurs niveaux de détail mécanique pour l'animation, permettant d'adapter le nombre de données à gérer lors de la génération du mouvement. Cette idée de niveau de détail mécanique a déjà été abordée dans le cadre des modèles « masses ressorts ». Sa mise en œuvre consiste en un raffinement ou un appauvrissement du réseau des points matériels [Palazzi 1994] [Hutchinson 1996]. Cette méthodologie exploite l'aspect discret des modèles « masses ressorts », elle n'est donc pas envisageable dans mon cadre de travail où j'attache une grande importance au caractère continu de l'approche dynamique. Je présente donc une nouvelle méthode conciliant mon souci de manipuler un modèle continu et la garantie d'une réduction importante de la taille du système à résoudre. Pour cela, je m'appuie sur la méthode de changement de paramétrage qui, à partir d'un nouveau jeu de coordonnées généralisées réduit et d'une fonction de changement de paramétrage, permet de reconstruire le paramétrage initial. Yannick Remion illustre les nombreux intérêts de cette méthode en l'appliquant à la gestion des contraintes par réduction cinématique [Rémion 2000]. Pour ma part, j'exploite cette démarche afin de construire un nouveau paramétrage du tricot dont les configurations accessibles demeurent suffisamment diversifiées tout en garantissant que la taille du nouveau système d'équations soit bien moindre. Je commence par rappeler les étapes importantes de la méthode de changement de paramétrage. Notamment je détaille comment, à partir d'un nouveau jeu de coordonnées généralisées et de la fonction de changement de paramétrage associée, on exprime les termes fondateurs du nouveau système d'équations à partir des termes du système initial. Enfin, j'expose la mise en œuvre de cette méthode dans le cas particulier des tricots en étayant ma démarche de résultats qualitatifs et quantitatifs justifiant l'intérêt de cette approche en termes de performance et de respect du comportement global de l'étoffe. Les résultats présentés dans ce chapitre ont déjà fait l'objet de publications [Nocent 2001a] [Nocent 2001b].

2 Réduction de paramétrage

Le méthode de réduction de paramétrage repose sur la construction d'un nouveau jeu de coordonnées généralisées $\tilde{\eta}$ évoluant dans un espace réduit des configurations étendues $\tilde{\mathbb{U}}$ de dimension $\tilde{n}+1 \leq n+1$. On définit alors une **fonction de réduction de paramétrage** $\gamma : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \mathbb{U}$ qui, à partir des coordonnées généralisées réduites $\tilde{\eta}$, permet de calculer le vecteur η des coordonnées généralisées initiales. On a donc la relation suivante :

$$\eta = \gamma(\tilde{\eta}) \text{ avec } \tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_0 \quad \tilde{\eta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\eta}_{\tilde{n}})^T \text{ et } \tilde{\eta}_0 = \eta_0 = t \quad (3.1)$$

Ainsi, l'ensemble des configurations permises par le paramétrage réduit $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ correspond au sous-espace $\gamma(\tilde{\mathcal{U}})$ inclus dans l'espace des configurations étendues \mathcal{U} . Dans la mesure où les paramétrages $\boldsymbol{\eta}$ et $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ décrivent la configuration d'un même système matériel, les termes constitutifs des équations du mouvement associées à chaque paramétrage doivent être en relation. En dérivant l'équation (3.1), on établit une première relation entre les taux de variation $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ et $\hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}$ de chaque paramétrage.

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \quad \text{où} \quad \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \text{ est la matrice jacobienne de } \gamma \quad (3.2)$$

En s'appuyant sur la remarque suivante,

$$\nabla_{0j}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_j} \gamma_0(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_j} \tilde{\eta}_0 = \delta_{0j} \quad (3.3)$$

la matrice jacobienne $\nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}})$ de γ présente des propriétés structurelles intéressantes, synthétisées par l'équation (3.4) :

$$\nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial t} \gamma^*(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) & \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec l'équation (3.5), je rappelle l'expression du système différentiel équivalent aux équations de Lagrange. Pour le mouvement réel $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t)$ exprimé dans le paramétrage réduit, la matrice $\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t))$ correspond à la matrice des masses généralisées et le vecteur $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(t))$ représente l'ensemble des efforts appliqués au système comme une différence des forces généralisées $\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(t))$ et des termes inertiels $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{n}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(t))$. Je ne traite pas ici le problème de changement d'expression des contraintes, ce travail ayant déjà été abordé en détail par Yannick Remion pour les besoins de son habilitation à diriger des recherches [Remion 2000].

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t)) \ddot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(t) = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(t), \dot{\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}(t)) \quad (3.5)$$

Dans la pratique, la taille du système (3.5) est nettement plus petit que la taille du système différentiel correspondant au paramétrage initial, garantissant ainsi le gain de performance escompté. Afin d'établir les similitudes entre les deux systèmes linéaires, je commence par comparer les expressions de l'énergie cinétique propres aux deux paramétrages.

$$\begin{aligned} \kappa(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}) &= \kappa(\boldsymbol{\eta} = \gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \hat{\boldsymbol{\eta}} = \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \frac{1}{2} \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}}^T (\nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{M}(\gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}})) \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}})) \hat{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Au final, on obtient la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{M}(\gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}})) \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.7)$$

Plus précisément,

$$\tilde{\mathbf{M}}^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \end{bmatrix} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

soit en définitive,

$$\tilde{\mathbf{M}}^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) = \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{M}^{**}(\boldsymbol{\eta}) \nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.9)$$

Je m'intéresse maintenant au terme des efforts généralisés $\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ correspondant au vecteur des puissances virtuelles des efforts donnés dans les \tilde{n} mouvements figés d'entraînement du paramétrage réduit. On cherche en fait à exprimer le vecteur $\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ à partir du terme $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$, vecteur des puissances virtuelles des efforts donnés dans les n mouvements figés d'entraînement du paramétrage initial.

La définition du terme $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}})$ dans les équations de Lagrange vient de l'expression des puissances virtuelles des efforts donnés appliqués au système dans les différents mouvements virtuels compatibles avec le paramétrage initial $\boldsymbol{\eta}$ et coïncidant en l'instant étudié avec le mouvement « réel » étudié. La puissance $P^*(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*)$ des efforts donnés appliqués au système matériel dans un mouvement virtuel compatible avec le paramétrage $\boldsymbol{\eta}$ et coïncidant en l'instant étudié avec le mouvement « réel » étudié s'écrit :

$$P^*(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) = \sum_{i=1}^n Q_i(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* = \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.10)$$

De façon équivalente, la puissance $\tilde{P}^*(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*)$ de ces efforts dans un mouvement virtuel compatible avec le paramétrage $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ vaut :

$$\tilde{P}^*(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}^*) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{Q}_i(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\eta}_i^* = \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.11)$$

Par construction, un mouvement virtuel compatible avec le paramétrage réduit $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ est forcément compatible avec le paramétrage initial $\boldsymbol{\eta}$. Ainsi, les mouvements virtuels utilisés dans (3.11) sont aussi valides pour (3.10) et l'expression de la puissance virtuelle des efforts donnés dans ces mouvements peut être indifféremment calculée d'après (3.10) ou (3.11). On aboutit donc à l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) &= \left(\nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \right) \cdot \mathbf{Q}(\gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ &= \left(\nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \right)^T \mathbf{Q}(\gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\boldsymbol{\eta}}) \\ &= \hat{\boldsymbol{\eta}}^* \cdot \left(\nabla^{**}(\tilde{\boldsymbol{\eta}})^T \mathbf{Q}(\gamma(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \nabla(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \hat{\boldsymbol{\eta}}) \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'égalité (3.12) est valide pour tout mouvement virtuel compatible avec le paramétrage réduit $\tilde{\eta}$. Ainsi, en considérant les mouvements figés d'entraînement, on arrive à la conclusion suivante :

$$\tilde{Q}(\tilde{\eta}, \hat{\eta}) = \nabla^{**}(\tilde{\eta})^T Q(\eta, \hat{\eta}) \quad (3.13)$$

Il est important de mentionner que les efforts considérés sont identiques dans les deux paramétrages. Mais comme les évolutions cinématiques permises par les deux paramétrages sont différentes, les effets de ces efforts sur le mouvement du système, « mesurés » par leurs puissances virtuelles dans des jeux de mouvements virtuels différents, ne sont pas identiques selon le paramétrage. Par contre si un mouvement réel $\varepsilon(t)$ exprimé dans le paramétrage initial reste toujours compatible avec le paramétrage réduit, son analyse à l'aide de ce paramétrage réduit donne exactement le même mouvement.

Enfin, je termine l'exposé de la méthode de réduction de paramétrage en donnant succinctement l'expression des termes inertiels (3.14) dans le paramétrage réduit $\tilde{\eta}$. Je m'attarde peu sur l'expression de ces termes dans la mesure où, comme je le montrerai dans la section suivante, le paramétrage réduit que j'utilise pour les tricots génère un nouveau système différentiel à matrice des masses généralisées constante, dépourvu par conséquent de termes inertiels. J'invite le lecteur désireux d'obtenir plus de détails concernant les termes inertiels à lire l'annexe II de l'habilitation à diriger des recherches de Yannick Remion.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{n}(\tilde{\eta}, \hat{\eta}) &= \nabla^{**}(\tilde{\eta})^T \left(\mathbf{I}\mathbf{n}(\eta, \hat{\eta}) + \mathbf{M}^{**}(\eta)\Psi(\tilde{\eta}, \hat{\eta}) \right) \\ \Psi_k(\tilde{\eta}, \hat{\eta}) &= \hat{\eta}^T \mathbf{H}^k(\tilde{\eta}) \hat{\eta} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$H_{ij}^k(\tilde{\eta}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_{ij}} \gamma_k(\tilde{\eta}) \text{ matrice hessienne} \quad (3.15)$$

3 Application à l'animation des textiles tricotés

Conformément au modèle mésoscopique proposé par Jean Michel Nourrit [Nourrit 1999], le paramétrage d'un morceau d'étoffe est donné par les positions des points de contrôle de chaque fil qui le constitue. Mais ce paramétrage, au nombre de degrés de liberté important, est de nature incomplète puisqu'il ne rend pas compte de la nature du liage. La structure des boucles est alors modélisée à l'aide de contraintes de contact entre fils. Ces contraintes, qui implicitement réduisent considérablement le nombre de degrés de liberté de la pièce d'étoffe, engendrent de nouvelles inconnues correspondant aux efforts de liaison garantissant leur réalisation. Ceci a pour conséquence d'accroître la taille déjà très grande du système d'équations à résoudre.

Ainsi, une réduction du paramétrage est tout à fait justifiée puisqu'un grand nombre des inconnues intervenant dans la résolution ne correspondent pas à proprement parler à de nouveaux degrés de liberté mais plutôt à des efforts venant réduire l'ensemble des configurations possibles. Ainsi, au prix d'une hypothèse simplificatrice, j'ai mis en place le

mécanisme de réduction de paramétrage en vue de se rapprocher du nombre véritable de degrés de liberté de l'étoffe tout en s'efforçant de conserver un comportement macroscopique riche. Bien qu'il ne s'agisse pas exactement d'une réduction cinématique (i.e. utilisation des équations de contraintes pour exprimer certains degrés de liberté en fonction d'autres), cette approche a deux avantages majeurs. Elle permet tout d'abord de diminuer le nombre d'inconnues correspondant au système matériel étudié. Mais surtout, elle autorise une prise en compte implicite des nombreuses contraintes de contact entre fils grâce à la réduction de paramétrage choisie. Je développe maintenant en détail ma solution au problème de réduction de paramétrage pour les textiles tricotés.

3.1 Mise en œuvre

3.1.1 Volume paramétrique englobant

Pour la réduction du paramétrage, j'ai choisi d'utiliser un volume paramétrique englobant l'ensemble des mailles de l'étoffe. Puisque les variations d'épaisseur d'un tricot sont relativement faibles, il apparaît plus pertinent de privilégier, à la place d'un volume spline dans les trois directions, un volume dont la variation paramétrique en épaisseur soit linéaire. Ce choix permet de réduire encore le nombre de degrés de liberté du tricot. En fait, ce volume noté V est obtenu par interpolation linéaire entre deux surfaces paramétriques S_1 et S_2 « parallèles » à la surface moyenne du liage (Figure 54). Ces deux surfaces S_1 et S_2 sont des surfaces splines bicubiques séparables définies à partir d'un même nombre $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ de points de contrôle notés respectivement $\mathbf{p}^{S_1, i}$ et $\mathbf{p}^{S_2, i}$, réparties en un même nombre de patches $\mathbf{ns} = (ns_1, ns_2)$.

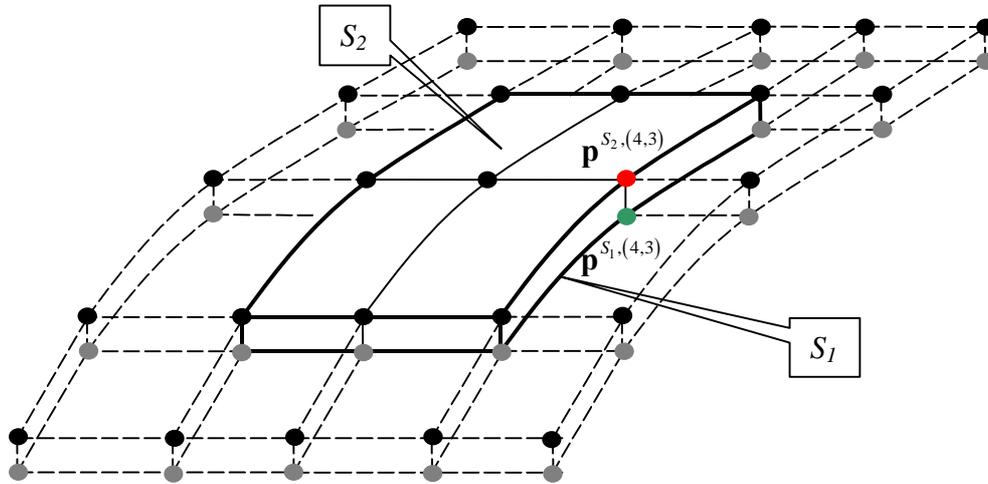


Figure 54 Volume paramétrique V composé de (2,2,1) patches, défini à partir de (5,5,2) points de contrôle.

Pour garantir la lisibilité du document, je choisis de reprendre les notations utilisées pour les variétés splines. Les points de contrôle du volume V sont donc indexés à l'aide d'un triplet $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ de la façon suivante :

$$\forall \mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}_n^2 \times \{1, 2\} : \mathbf{p}^{V, \mathbf{i}} = \begin{cases} \mathbf{p}^{S_1, (i_1, i_2)} & \text{si } i_3 = 1 \\ \mathbf{p}^{S_2, (i_1, i_2)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

De cette manière, le volume englobant V doit être considéré comme une variété spline de dimension 3 composée de $(n_1, n_2, 2)$ (que l'on notera désormais \mathbf{n}) points de contrôle et de $(ns_1, ns_2, 1)$ (dorénavant noté \mathbf{ns}) sous-variétés splines. La position temporelle $\mathbf{p}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega})$ d'un point du volume V de coordonnées paramétriques $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ à l'intérieur de la sous variété d'indice $\mathbf{j} = (j_1, j_2, 1)$ délimitée par les patches de S_1 et S_2 d'indice (j_1, j_2) est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{p} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{N}_{\mathbf{ns}}^3 \times [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \mathbf{p}(t, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{1 \leq i \leq \mathbf{n}} b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{p}^{V,i} \end{cases} \quad (3.17)$$

Où la fonction de mélange $b_i^{\mathbf{j}}$ correspond au poids de la contribution des points de contrôle d'indice \mathbf{i} pour la définition de la sous-variété \mathbf{j} , obtenue par le produit de la fonction de mélange séparable $b_{i_1}^{j_1}(\omega_1) b_{i_2}^{j_2}(\omega_2)$ des surfaces S_1 et S_2 , avec une fonction d'interpolation linéaire de la variable ω_3 .

$$b_i^{\mathbf{j}}(\boldsymbol{\omega}) = b_{i_1}^{j_1}(\omega_1) b_{i_2}^{j_2}(\omega_2) b_{i_3}(\omega_3) \text{ avec } b_{i_3}(\omega_3) = \begin{cases} (1-\omega_3) & \text{si } i_3 = 1 \\ \omega_3 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.18)$$

Les points de contrôle $(\mathbf{p}^{V,i})_{1 \leq i \leq \mathbf{n}}$ du volume englobant V correspondent aux nouveaux degrés de liberté du système matériel. On introduit maintenant la bijection α^V , fonction de transcodage permettant d'établir le lien entre l'indexation multi-indicielle des points de contrôle et l'indexation entière du vecteur des coordonnées généralisées.

$$\alpha^V : \begin{cases} \mathbb{N}_{\mathbf{n}}^3 \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ avec } n = \text{Card}(\mathbf{n}) = 2n_1n_2 \\ (i_1, i_2, i_3) \mapsto \alpha^V(i_1, i_2, i_3) = (i_3 - 1)n_1n_2 + \alpha^{S_1}(i_1, i_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

D'une manière classique, les coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}^V$ du volume englobant V sont obtenues grâce à la relation ci-dessous :

$$\forall 1 \leq i \leq \mathbf{n} : \eta_{\alpha^V(i)+(k-1)n}^V = p_k^{V,i} \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (3.20)$$

Par conséquent, le vecteur des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}^V$ a la structure suivante :

$$\boldsymbol{\eta}^V = \left(\underbrace{p_1^{S_1,1}, \dots, p_1^{S_1,n}}_{\text{surface } S_1} \underbrace{p_1^{S_2,1}, \dots, p_1^{S_2,n}}_{\text{surface } S_2} \underbrace{p_2^{S_1,1}, \dots, p_2^{S_1,n}}_{\text{surface } S_1} \underbrace{p_2^{S_2,1}, \dots, p_2^{S_2,n}}_{\text{surface } S_2} \underbrace{p_3^{S_1,1}, \dots, p_3^{S_1,n}}_{\text{surface } S_1} \underbrace{p_3^{S_2,1}, \dots, p_3^{S_2,n}}_{\text{surface } S_2} \right)^T$$

A partir de la définition des coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}^V$ du volume englobant V (3.20) et de la position temporelle (3.17), je suis en mesure de définir la fonction de positionnement Φ associée à cette variété spline.

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{U} \times \mathbb{N}_{ns}^3 \times [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto \Phi(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad (3.21)$$

où $\Phi_k(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{1 \leq i \leq n} b_i^j(\boldsymbol{\omega}) \eta_{\alpha(i)+(k-1)n} = \sum_{1 \leq i \leq n} b_{\alpha^{-1}(i)}^j(\boldsymbol{\omega}) \eta_{i+(k-1)n} \quad 1 \leq k \leq 3$

3.1.2 Plongement du liage

Avant toute chose, pour alléger les notations déjà chargées, je considère des évolutions ne dépendant pas explicitement du temps. De cette manière, j'omettrai dorénavant de mentionner la coordonnée η_0 du vecteur des configurations étendues $\boldsymbol{\eta}$.

Je dispose d'ores et déjà d'un jeu réduit de degrés de liberté pour un tricot, correspondant aux points de contrôle du volume englobant V . Dans un deuxième temps, il me faut définir une fonction de réduction de paramétrage pour déduire des degrés de liberté réduits les degrés de liberté initiaux, correspondant aux points de contrôle de chacun des fils. A cette fin, je formule l'hypothèse simplificatrice suivante : les points de contrôle des fils sont à coordonnées paramétriques constantes au sein du volume englobant V . Cette hypothèse est à rapprocher de celle effectuée dans les **Free Form Deformations** [Sederberg 1986] dans la mesure où les fils sont considérés comme figés dans un volume déformable. Mais, conformément à la démarche de changement de paramétrage, j'ajoute une dimension dynamique à l'approche de Sederberg qui constitue l'innovation de cette méthode. En effet, les déformations appliquées au volume V proviennent de l'application des efforts sur les fils du tricot et non d'une simple transformation géométrique.

Cette fonction de réduction de paramétrage que je qualifie de **fonction de plongement du liage** permet, à partir d'une configuration $\boldsymbol{\eta}^V$ du volume englobant V , de calculer les positions des points de contrôle de chaque fil constitutif du tricot.

Soit un tricot composé de r rangées de mailles et par conséquent de r fils, on note $(\mathbf{p}^{f,i})_{1 \leq i \leq nf}$ le vecteur constitué des nf points de contrôle du fil f ($1 \leq f \leq r$).

Les coordonnées généralisées $\boldsymbol{\eta}^f = (\eta_i^f)_{1 \leq i \leq 3nf}$ du fil f s'expriment de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\eta}^f = \left(\underbrace{p_1^{f,1}, \dots, p_1^{f,nf}}_x, \underbrace{p_2^{f,1}, \dots, p_2^{f,nf}}_y, \underbrace{p_3^{f,1}, \dots, p_3^{f,nf}}_z \right)^T = \begin{pmatrix} (p_1^{f,i})_{1 \leq i \leq nf} \\ (p_2^{f,i})_{1 \leq i \leq nf} \\ (p_3^{f,i})_{1 \leq i \leq nf} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

En s'appuyant sur ces notations, on donne la définition de la fonction $\gamma^f : \mathbb{R}^{3nV} \rightarrow \mathbb{R}^{3nf}$ qui permet de déterminer la position des points de contrôle du fil f :

$$\begin{aligned} \eta_{k+(l-1)n}^f &= \left(\gamma^f(\boldsymbol{\eta}^V) \right)_{k+(l-1)n} \\ &= \Phi_l(\mathbf{t}, \mathbf{j}^{f,k}, \boldsymbol{\omega}^{f,k}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} b_{\alpha^{-1}(i)}^{j^{f,k}}(\boldsymbol{\omega}^{f,k}) \eta_{i+(l-1)n}^V \end{aligned} \quad (3.23)$$

où $\omega^{f,k} = (\omega_1^{f,k}, \omega_2^{f,k}, \omega_3^{f,k})$ sont les coordonnées paramétriques constantes, au sein de la sous-variété d'indice $\mathbf{j}^{f,k} = (j_1^{f,k}, j_2^{f,k}, 1)$ du volume englobant, du point de contrôle k appartenant au fil f .

De par l'équation (3.23), il apparaît que la fonction $\gamma^f : \mathbb{R}^{3n^V} \rightarrow \mathbb{R}^{3n^f}$ est une application linéaire, on note alors $\Gamma^f \in M_{3n^f, 3n^V}(\mathbb{R})$ sa représentation matricielle. De plus, les coefficients de Γ^f associés aux coordonnées $\eta_{i+(l-1)n}^V$ dans l'expression (3.23) sont identiques pour $l=1,2,3$. Cette particularité implique, au vu de la structure des vecteurs $\boldsymbol{\eta}^V$ et $\boldsymbol{\eta}^f$, que la matrice Γ^f est constituée de trois blocs identiques :

$$\boldsymbol{\eta}^f = \Gamma^f \boldsymbol{\eta}^V \quad \text{où} \quad \Gamma^f = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^f & & \\ & \tilde{\Gamma}^f & \\ & & \tilde{\Gamma}^f \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \tilde{\Gamma}^f \in M(\mathbb{R}^{n^f}, \mathbb{R}^{n^V}), \quad \tilde{\Gamma}_{pq}^f = b_{\alpha^{-1}(q)}^{j^{f,p}}(\omega^{f,p}), \quad (3.24)$$

Si l'on nomme $\boldsymbol{\eta}$ le vecteur correspondant à la concaténation des coordonnées généralisées de chacun des fils, on obtient l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\underbrace{\underbrace{\eta_1^{1,1}, \dots, \eta_1^{1,n_1}}_{\text{fil 1}}, \dots, \underbrace{\eta_1^{r,1}, \dots, \eta_1^{r,n_r}}_{\text{fil r}}}_{x}, \underbrace{\underbrace{\eta_2^{1,1}, \dots, \eta_2^{1,n_1}}_{\text{fil 1}}, \dots, \underbrace{\eta_2^{r,1}, \dots, \eta_2^{r,n_r}}_{\text{fil r}}}_{y}, \underbrace{\underbrace{\eta_3^{1,1}, \dots, \eta_3^{1,n_1}}_{\text{fil 1}}, \dots, \underbrace{\eta_3^{r,1}, \dots, \eta_3^{r,n_r}}_{\text{fil r}}}_{z} \right)^T$$

Le vecteur des configurations $\boldsymbol{\eta}$ correspond, en reprenant la terminologie de la section 2, au paramétrage initial du système matériel. Et la fonction de plongement du liage Γ définie en (3.25) représente la fonction de réduction de paramétrage.

$$\boldsymbol{\eta} = \Gamma \boldsymbol{\eta}^V \quad \text{avec} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\Gamma}^{n_r} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\Gamma}^{n_r} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \tilde{\Gamma}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\Gamma}^{n_r} \end{array} \right) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

3.2 Validation qualitative

Il semble clair que cette méthode de réduction de paramétrage n'est viable que si elle préserve suffisamment de degrés de liberté significatifs au système matériel, de sorte que son évolution dans ce nouvel espace cinématique réduit soit assez riche pour permettre des mouvements comparables, à l'échelle macroscopique, à ceux fournis par le paramétrage initial. Ceci est parfaitement envisageable pour le cas des textiles tricotés dans la mesure où l'espace initial des

configurations est largement sous exploité du fait de l'existence de nombreuses contraintes de contact. La réduction de paramétrage s'effectue alors au détriment des petites déformations locales des boucles, possibles dans le paramétrage initial mais considérées négligeables dans le paramétrage réduit. Afin de vérifier cette affirmation, j'entreprend tout d'abord une validation de nature qualitative. J'impose au volume englobant V plusieurs déformations de nature géométrique. Les mailles du tricot sont alors reconstruites au sein du volume déformé par le biais de la fonction de plongement du liage.

Cette méthode permet d'apprécier la pertinence du choix de la fonction de paramétrage (Figure 55, Figure 56, Figure 57 et Figure 58) dans la mesure où les déformations imposées au tricot ne viennent pas détériorer la structure du liage et conduisent à des géométries de boucles convaincantes. Cette première vérification concluante permet d'envisager de poursuivre la démarche en déduisant le système différentiel réduit, dont les inconnues correspondent aux coordonnées généralisées du volume V , à partir des éléments constitutifs du système différentiel correspondant au paramétrage initial.



Figure 55 Traction dans le sens des colonnes et des rangées

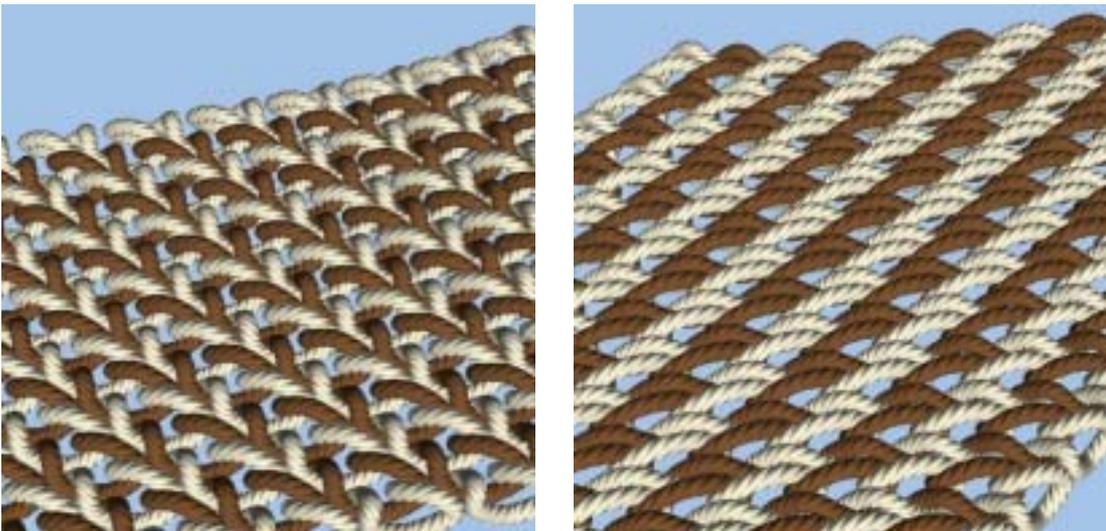


Figure 56 Cisaillement dans le sens des colonnes et des rangées

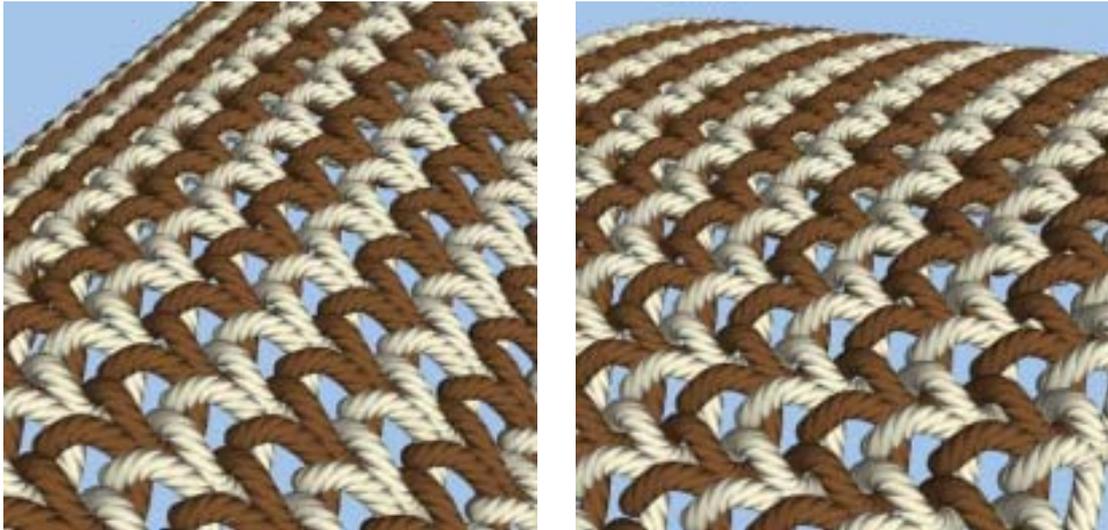


Figure 57 Flexion dans le sens des rangées et des colonnes

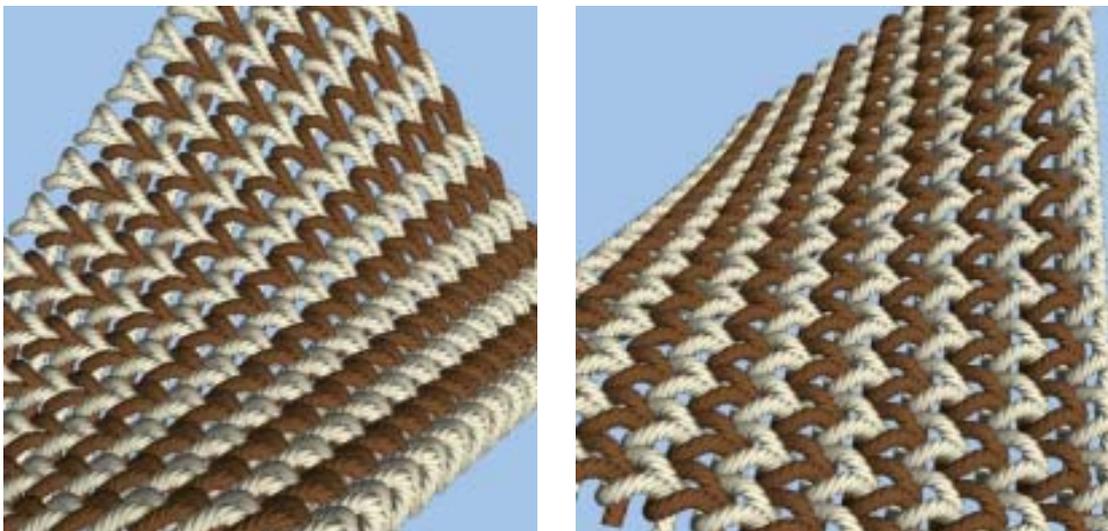


Figure 58 Torsion dans le sens des rangées et des colonnes

3.3 Construction du système différentiel « réduit »

3.3.1 Matrice des masses généralisées

Je commence par expliciter la structure de la matrice des masses généralisées pour le paramétrage réduit $\boldsymbol{\eta}^V$. Pour cela, je rappelle l'expression de \mathbf{M}^f ($1 \leq f \leq r$), la matrice des masses généralisées associée à chaque fil f . Les propriétés structurelles de \mathbf{M}^f ont été détaillées dans le chapitre 1 : Géométrie des variétés splines.

$$\mathbf{M}^f \in M_{3n_f}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \mathbf{M}^f = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^f & & \\ & \mathbf{m}^f & \\ & & \mathbf{m}^f \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Si on note \mathbf{M} la matrice des masses généralisées associée au paramétrage initial $\boldsymbol{\eta}$, concaténation des coordonnées généralisées des fils, on a :

$$\mathbf{M} \in M_{3 \sum_{f=1}^r n_f}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} & & \\ & \mathbf{m} & \\ & & \mathbf{m} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{m}^r \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

De par l'expression particulière de la fonction Γ (3.25), la matrice des masses généralisées \mathbf{M}^V associée au paramétrage réduit $\boldsymbol{\eta}^V$ s'exprime comme suit :

$$\mathbf{M}^V \in M_{3n^V}(\mathbb{R}) \quad ; \quad \mathbf{M}^V = \Gamma^T \mathbf{M} \Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{m}^V & & \\ & \mathbf{m}^V & \\ & & \mathbf{m}^V \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{m}^V = \sum_{i=1}^r \tilde{\Gamma}^{iT} \mathbf{m}^i \tilde{\Gamma}^i \quad (3.28)$$

Comme la fonction de réduction de paramétrage est linéaire, sa jacobienne représentée par la matrice Γ est constante. Cette invariance de la jacobienne garantit que la matrice \mathbf{M}^V est elle aussi constante. Ce résultat permet de calculer par avance la matrice \mathbf{M}^V ainsi que sa décomposition lors de l'initialisation afin d'accélérer la résolution du système réduit.

3.3.2 Puissance virtuelle des efforts

D'autre part, le vecteur \mathbf{Q}^V des puissances virtuelles des efforts exprimés dans le paramétrage réduit $\boldsymbol{\eta}^V$ s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^V &= \Gamma^T \mathbf{Q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{Q}^{1^T} \dots \mathbf{Q}^{r^T})^T \\ \mathbf{Q}^V &= \sum_{f=1}^r \Gamma^{f^T} \mathbf{Q}^f \end{aligned} \quad (3.29)$$

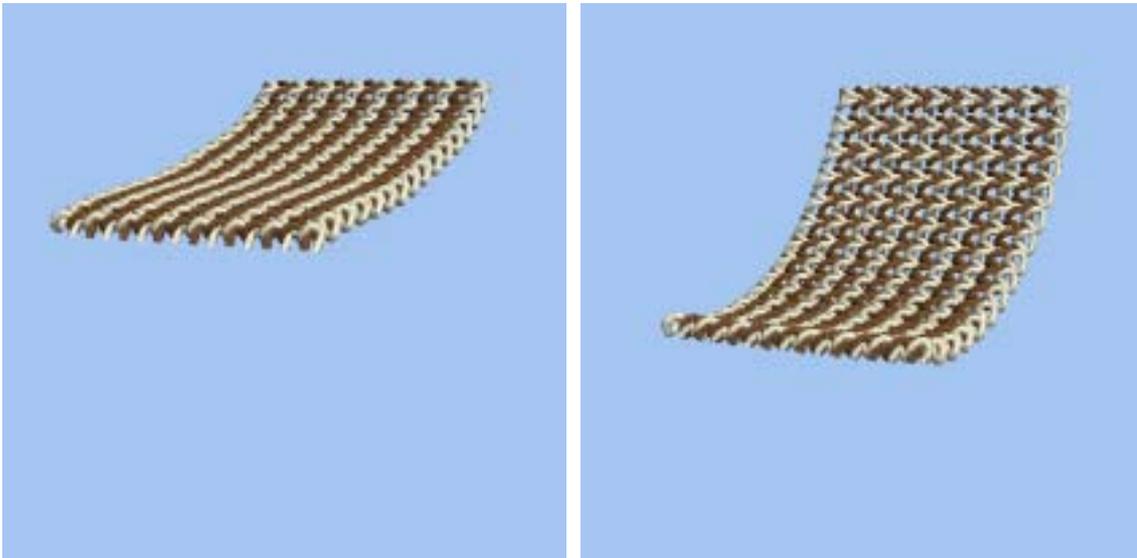
Le vecteur \mathbf{Q}^f correspond au vecteur des puissances virtuelles des efforts appliqués au fil f , exprimées dans le paramétrage initial $\boldsymbol{\eta}^f$.

3.4 Exemple numérique

On considère un volume englobant V constitué de (5,5,2) points de contrôle, englobant un morceau de tricot de 15 rangées et 15 colonnes de maille jersey. A raison de $8nc+3$ points de contrôle et de $2nc$ contraintes vectorielles de contact fil à fil par rangée pour nc colonnes de jersey, on obtient les données suivantes.

	Tricot (paramétrage initial)	Volume englobant (paramétrage réduit)
Degrés de liberté par fil	$3 \times (8 \times 15 + 3) = 369$	
Total des degrés de liberté	$15 \times 369 = 55535$	$3 \times (5 \times 5 \times 2) = 150$
Contraintes scalaires par fil	$3 \times (2 \times 15) = 90$	
Total des contraintes scalaires	$15 \times 90 = 1350$	
Total des inconnues scalaires	$55535 + 1350 = 6886$	150

Lorsque l'on s'intéresse au nombre d'inconnues scalaires intervenant dans chaque paramétrage, on s'aperçoit que la méthode de réduction de paramétrage mise en place induit une diminution du nombre d'inconnues d'un rapport à peu près égal à 45. Cette réduction drastique du nombre d'inconnues à gérer lors de la résolution garantit comme on l'espérait un gain très significatif en terme de temps de calculs. Les 4 images de la Figure 59 illustrent, malgré la réduction importante des degrés de liberté du système, la préservation de la richesse du mouvement.



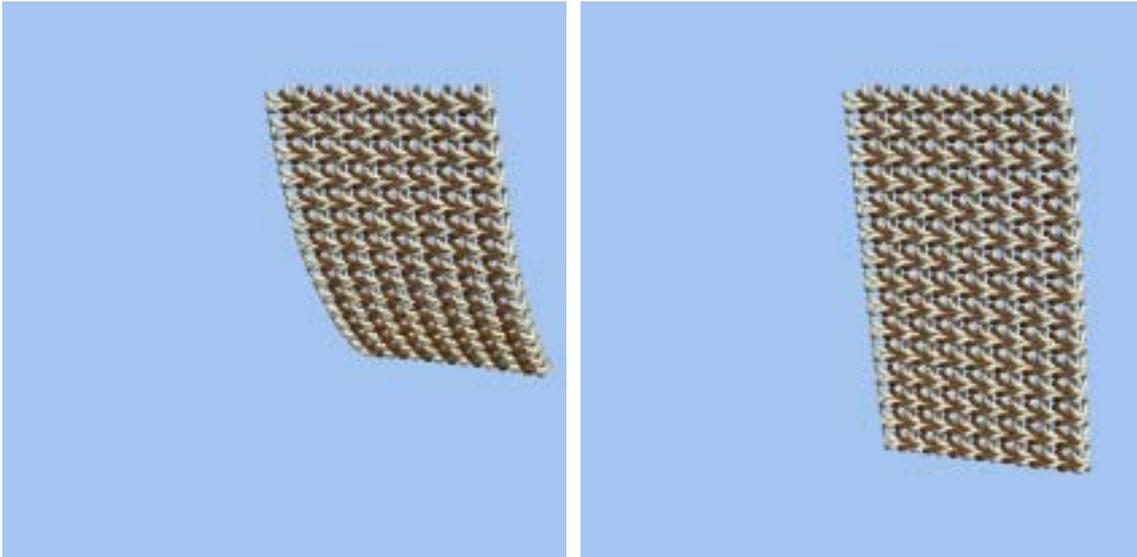


Figure 59 Images issues d'une animation d'un volume englobant composé de $(2,2,1)$ sous-variétés, englobant un échantillon de 15 colonnes et 15 rangées de maille jersey.

Les deux images de la Figure 60 illustrent une autre particularité de la méthode de réduction de paramétrage. En effet, même si les degrés de liberté du tricot correspondent aux coordonnées des points de contrôle du volume englobant V , les efforts qui lui sont appliqués sont une réinterprétation dans le paramétrage réduit des efforts appliqués aux fils. Cet aspect permet de rendre compte de déformations non uniformes au sein du volume englobant pourtant régulier.

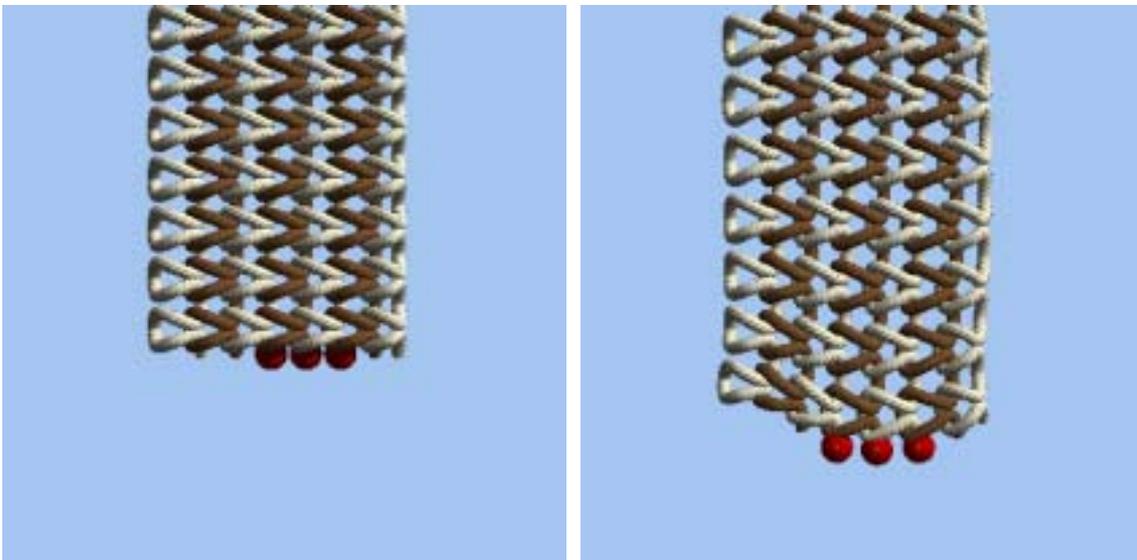


Figure 60 Images issues d'une animation d'un échantillon suspendu, lesté par des masses disposées de façon asymétrique.

4 Conclusion

Pour résumer, j'ai présenté dans ce chapitre une application de la méthode de changement de paramétrage visant à mettre en place les bases théoriques d'une nouvelle méthode de niveau de détail mécanique compatible avec mon modèle dynamique continu. Cette méthode ne procède

pas par raffinement ou appauvrissement de la discrétisation du système matériel étudié mais plutôt par réduction de ses degrés de liberté, conformément au formalisme lagrangien. Cette méthode permet d'obtenir un système d'équations beaucoup plus petit et par conséquent de diminuer les temps de calcul pour la production d'animations. Mais le mécanisme de niveau de détail sur des structures discrètes est en règle générale adaptatif, permettant ainsi de faire varier dynamiquement la taille du système à résoudre. Pour le moment statique, cette méthode doit évoluer afin de me permettre d'adapter dynamiquement le nombre de sous-variétés constituant le volume englobant V , modifiant le nombre de degrés de liberté des boucles selon les configurations et les efforts appliqués.



CONCLUSION GENERALE

Ce dernier chapitre est l'occasion de dresser le bilan des travaux réalisés durant ces quelques années de recherche. Comme je l'ai mentionné en introduction, les objectifs de cette thèse étaient doubles de par la diversité des contextes de l'époque.

Tout d'abord, l'importante restructuration des travaux de l'équipe d'animation dynamique du LERI m'encouragea à participer à cet effort commun en entreprenant la rédaction de plusieurs travaux bibliographiques. Ces travaux qui constituent une bonne partie de ce mémoire de thèse sont au nombre de trois.

La première étude bibliographique a pour thème une justification des équations de Lagrange. Ce sujet, bien qu'en apparence très éloigné des considérations informatiques, est néanmoins d'une importance capitale pour tout informaticien désireux de mettre en œuvre une application d'animation s'appuyant sur les lois de la physique. Mais je ne cherche pas à donner une démonstration mathématique rigoureuse de ces équations. Je cherche plutôt à guider le lecteur dans le développement de ce formalisme : je m'emploie à dégager son sens physique en illustrant chaque concept fondateur. Cette étude a pour vocation d'éviter au lecteur de buter sur les nombreuses difficultés ou ambiguïtés des équations de Lagrange et de lui fournir tous les éléments nécessaires à une implantation informatique des équations de Lagrange.

La deuxième étude qui traite des problèmes d'intégration numérique, autre discipline étrangère à l'informatique, est rédigée avec le même souci didactique. La résolution d'équations différentielles de nature quelconque s'appuie sur des méthodes numériques pour déterminer une solution approchée. Mais les méthodes existantes sont nombreuses et ne présentent pas toutes les mêmes avantages ou inconvénients. Une classification se révèle alors précieuse pour aider l'informaticien à choisir la méthode d'intégration la plus appropriée au problème qu'il cherche à résoudre. J'expose alors plusieurs critères de comparaison avant d'introduire les méthodes les plus couramment utilisées. L'intérêt de cette étude réside dans la synthèse de ces méthodes, répertoriées selon leur nature, leurs avantages et inconvénients respectifs.

Enfin la dernière étude de cette première partie consiste en un état de l'art des modèles déformables pour l'animation dynamique. Cette étude, tout à fait classique pour un mémoire de thèse, permet de dresser une cartographie des différentes approches retenues pour l'animation dynamique d'objets non rigides. Cette étude a le mérite de présenter les avantages et les inconvénients et de justifier la nécessité du modèle que je présente dans la deuxième partie de ce mémoire.

La deuxième partie de ce document, initialement motivée par le contexte applicatif de mon travail, développe les étapes de l'élaboration d'un modèle mécanique générique pour représenter un milieu continu déformable. En effet, mon travail de thèse s'inscrit dans la continuité de celui de Jean-Michel Nourrit qui consista à proposer un modèle informatique pour la représentation, l'animation et la visualisation de textiles tricotés. Ce modèle repose principalement sur un modèle de courbes splines qui correspondent aux fils constitutifs du tricot. Ce modèle que nous qualifions de courbe spline matérielle est en fait à l'origine du modèle innovant que je propose. En effet, animé par cette volonté d'unification et de généralisation des travaux de l'équipe, j'entrepris une refonte du modèle de Jean-Michel afin qu'il réponde aux nouvelles exigences du

moteur d'animation dynamique unifié mais aussi qu'il permette de représenter une plus grande gamme de corps déformables. La première étape de cette unification consiste en la proposition d'une définition de courbe spline indépendante de la nature des fonctions de mélange. L'introduction de la notion de segment spline permet de généraliser la propriété de localité (réalisée par certaines courbes splines) à toutes les courbes splines sans distinction. La deuxième étape débouche sur une définition de variété spline qui vient unifier les définitions très similaires de courbes, surfaces et volumes splines. Ce nouveau modèle rassemble une grande variété de formes d'allures et de dimensions quelconques. Ce modèle de corps déformable se distingue des autres par sa capacité à préserver la continuité du milieu qu'il représente. D'autre part, sa simplicité (la position d'un point de la variété spline est obtenue par combinaison linéaire d'un nombre réduit de points de contrôle pondérée par des fonctions de mélange) permet de réaliser de nombreuses simplifications des équations du mouvement, débouchant sur l'expression d'un système différentiel équivalent et formellement exact. La préservation de la continuité demeure une préoccupation centrale lorsque j'étend l'expression du modèle de variété spline à la dynamique. Je détaille d'ailleurs la construction d'une répartition massique continue paramétrique à partir de la définition d'une densité de masse par unité de longueur, plus intuitive pour l'utilisateur du modèle. La nature même du modèle autorise l'expression de forces ponctuelles en des points quelconques de la variété du fait de sa nature continue. Contrairement aux approches couramment répandues, je ne procède pas à une discrétisation du milieu pour déboucher sur une expression simplifiée des équations du mouvement. La seule discrétisation persistante que je souhaite éliminer réside dans la modélisation des efforts internes d'élasticité. Dans un premier temps, j'utilisais des ressorts régulièrement répartis au sein de la variété pour représenter les contraintes internes. Mais, fidèle à cette volonté d'aboutir à la définition d'un modèle mécanique continu, je développe mes efforts pour construire une énergie continue de déformation issue de la théorie de l'élasticité en déplacements finis. Ces premiers travaux se limitent pour le moment au cas des courbes splines. Mais les résultats satisfaisants de par leur adéquation à la définition des matériaux et le surcoût négligeable en temps de calculs m'encouragent à continuer dans cette voie.

Une fois le modèle de variété spline construit, je m'oriente de nouveau vers la simulation de tricots. J'exploite le modèle générique proposé afin de réaliser certaines optimisations sur le modèle initial de tricots pour équilibrer le souci de réalisme avec les besoins de performance. Je mets à profit la méthode de réduction de paramétrage en plongeant les mailles du tricot dans un volume spline englobant. Le nouveau système matériel que constitue ce volume est doté d'un nombre réduit de points de contrôle et est dénué de toute contrainte de contact entre fils. Cette approche permet d'aboutir à un système d'équations de taille très réduite en comparaison avec celui déduit d'une modélisation à l'échelle du fil.

Nombre des objectifs ont alors été atteints durant cette thèse mais naturellement pas tous. Ainsi, ce travail mérite d'être prolongé pour atteindre une véritable maturité. Parmi les nombreuses perspectives que l'on peut envisager, voici celles qui me semblent nécessaires à l'évolution du modèle de variétés splines :

Le nombre de fonctions de mélange actuellement implantées au sein du moteur d'animation dynamique est relativement faible et se limite essentiellement aux fonctions cubiques

d'interpolation. L'architecture de classes a été conçue pour que l'ajout de nouvelles fonctions se fasse de façon naturelle. Ne reste plus alors qu'à retrousser ses manches pour entreprendre leur codage et enrichir ainsi la palette de formes envisageables au sein du modèle. Toujours dans le but d'enrichir les formes réalisables, j'envisage d'autres configurations de réseau de contrôle que la configuration parallélépipédique jusqu'à là utilisée. En utilisant, des objets splines circulaires dont les extrémités partagent les mêmes points de contrôle, on peut alors naturellement représenter des objets sphériques, cylindriques ou toriques. Une autre piste consiste à travailler non pas sur le réseau des points de contrôle mais sur le domaine paramétrique qui identifie les particules du corps déformable représenté par une variété spline. Ces approches non encore implantées sont sérieusement envisagées.

Une autre direction de recherche issue du modèle de variété spline est l'enrichissement de la définition de l'énergie continue de déformation dont découlent les efforts internes d'élasticité. En effet, ce travail qui s'inscrit dans une démarche rigoureuse et générale se limite dans ce mémoire au cas des objets linéiques. Ce modèle ayant fait ses preuves, l'étape de validation est satisfaisante et me permet d'envisager son extension au cas des dimensions supérieures. Je suis conscient que cette extension va engendrer un surcoût important du fait de l'explosion combinatoire. Pour cette raison, j'envisage aussi de rendre l'expression de la loi de comportement plus modulaire afin de pouvoir régler l'ordre des termes intervenant dans son expression.

De façon plus pragmatique, les efforts réalisés pour accroître la performance de modèle de textiles tricotés sont satisfaisants mais doivent être approfondis. La méthode de réduction de paramétrage permet de réduire de façon importante le nombre d'inconnues intervenant dans les équations du mouvement. Mais cette réduction est statique et peut se révéler inadapté pour rendre compte d'une déformation importante très localisée d'un échantillon textile. Pour que cette méthode puisse devenir une véritable méthode de niveau de détail mécanique, il nous faut envisager la possibilité d'adapter dynamiquement les degrés de liberté du volume pour pouvoir rendre compte plus finement des déformations locales.

BIBLIOGRAPHIE

- [Arnold 1989] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics (Second Edition)*. Springer Verlag, 1989.
- [Bathe 1982] K.L. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Inc., Enlewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [Blanc 1994] C. Blanc, *Techniques de Modélisation et de Déformation de Surfaces pour la Synthèse d'Images*. Thèse de doctorat en informatique, Université de Bordeaux I, 1994.
- [Baraff 1992] D. Baraff, A. Witkin, *Dynamic simulation of non-penetrating flexible bodies*. SIGGRAPH'92 Conference Proceedings, 26(4) p303-308, 1992.
- [Baraff 1996] D. Baraff, *Linear-time dynamics using Lagrange multipliers*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p137-146, 1996.
- [Baraff 1998] D. Baraff, A. Witkin, *Large steps in cloth simulation*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p43-54, 1998.
- [Barnhill 1974] R. Barnhill, R. Riesenfeld, *Computer aided Geometric design*. Academic Press, 1974.
- [Barroso Filho 1994] W. Barroso Filho, *La mécanique de Lagrange (Principes et méthodes)*. Editions Karthala, Paris, 1994.
- [Barsky 1981] B. Barsky, *The Beta-spline : a local representation based on shape parameters and fundamental geometric measures*. PhD Thesis, University of Utah, 1981.
- [Barsky 1983] B. Barsky, J. Beatty, *Local control of bias and tension in Beta-splines*. SIGGRAPH'83 Conference Proceedings, 17(3) p193-218, 1983.
- [Baumgarte 1972] J. Baumgarte, *Stabilization of constraints and integrals of motion*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng. (1) p1-16, 1972
- [Benz 1988] W. Benz, *Application of Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) to Astrophysical Problems*. Comp. Phys. Comm., (48) p97-105, 1988.
- [Bérest 1997] P. Bérest, *Calcul des variations, application à la mécanique et la physique*. X Ecole Polytechnique. Ellipses, 1997.
- [Berger 1987] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 1987.
- [Bézier 1966] P. Bézier, *Définition numérique de courbes et surfaces*, Automatisation, (11) p 625-632 (partie 1), (12) p 17-21 (partie 2), 1966.

- [Bézier 1977] P. Bézier, *Essai de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1977.
- [Bourguignon 2000] D. Bourguignon, M.P. Cani, *Controlling Anisotropy in Mass-Spring Systems*. Proceedings of the 11th Eurographics Workshop on Computer Animation and Simulation. Springer-Verlag, 2000.
- [B. de Casson 2000] F. Boux de Casson, C. Laugier. *Simulating 2D tearing phenomena for interactive medical surgery simulators*. Computer Animation Proceedings, 2000.
- [Breen 1992] D.E. Breen, D.H. House, P.H. Getto, *A physical based particle model of woven cloth*. The Visual Computer, (8) p264-277, 1992.
- [Breen 1994] D.E. Breen, D.H. House, M. Wozny, *Predicting the drape of woven cloth using interacting particles*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p365-372, 1994.
- [Bro-Nielsen 1996] M. Bro-Nielsen, S. Cotin, *Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation*. Eurographics'96 Proceedings, p21-30, 1996.
- [Butcher 1964] J.C. Butcher, *On Runge-Kutta processes of high order*. J. Australian Math. Soc., (4) p179-194, 1964.
- [Calkin 1996] M.G. Calkin, *Lagrangian & Hamiltonian mechanics*. World Scientific, 1996.
- [Cartwright 1992] J.H.E. Cartwright, O. Piro, *The Dynamics of Runge-Kutta Methods*. Int. J. Bifurcation and Chaos (2) p427-449, 1992.
- [Catmull 1974] E. Catmull, R. Rom, *A class of local interpolating splines*. Dans [Barnhill 74] p317-326.
- [Ciarlet 1986] P.G. Ciarlet, *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris, 1986.
- [Collier 1991] J. Collier, B. Collier, G. O'Toole, S. Sargand, *Drape prediction by means of finite elements analysis*. Journal of the Textile Institute, 82(1) p96-107, 1991.
- [Coquillart 1990] S. Coquillart, *Extended free form deformation: a sculpturing tool for 3D geometric modeling*. SIGGRAPH'90 Conference Proceedings, 24(4) p187-193, 1990.
- [Coquillart 1991] S. Coquillart, P. Jancene, *Animated FreeForm Deformation: An Interactive Animation Technique*. SIGGRAPH'91 Conference Proceedings, 25(4) p23-26, 1991.
- [Cotin 1997] S. Cotin, *Modèles anatomiques déformables en temps-réel*. Thèse de doctorat en Sciences de l'Ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.

- [Cozot 1996] R. Cozot, *Environnement de simulation de systèmes physiques : modèle et langage*. Thèse de doctorat en informatique, Université de Rennes I, 1996.
- [Crouzeix 1989] M. Crouzeix, A. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles, 2^e édition*. Masson, Paris, 1989.
- [Dacorogna 1992] B. Dacorogna, *Introduction au calcul des variations*. Cahiers mathématiques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1992.
- [Debunne 2000] G. Debunne, *Animation multirésolution d'objets déformables en temps-réel, Application à la simulation chirurgicale*. Thèse de doctorat spécialité Imagerie, Vision et Robotique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [Demailly 1991] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*. Editions Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [Desbrun 1997] M. Desbrun, *Modélisation et animation d'objets hautement déformables à l'aide de surfaces implicites*. Thèse de doctorat spécialité Imagerie, Vision et Robotique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [Dieudonné 1968] J.A. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1968.
- [Eberhardt 1996] B. Eberhardt, A. Weber, W. Strasser, *A Fast, Flexible, Particle-System Model for Cloth Draping*. IEEE Computer Graphics and Applications, 16(5) p52-59, 1996.
- [Eberhardt 1999] B. Eberhardt, A. Weber, *A particule system approach to knitted textiles*. Computers & Graphics, (23) p599-606, 1999.
- [Eischen 1996] J.W. Eischen, S. Deng, T.G. Clapp, *Finite-Element Modeling and Controm of Flexible Fabric Parts*. IEEE Computer Graphics and Applications, 16(5) p71-80, 1996.
- [Enright 1995] W.H. Enright, D.J. Higham, B. Owren, P.W. Sharp, *A survey of the Explicit Runge-Kutta method*. Technical Report, Computer Sciences Department, University of Toronto, 1995
- [Farin 1990] G. Farin, *Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design: a practical guide*. Academic Press, second edition, 1990.
- [Fehlberg 1974] E. Fehlberg, *Classical seventh, sixth and fifth-order Runge-Kutta-Nyström formulas with step size control for general second order differential equations*. Tech. Report 432, NASA, 1974
- [Foley 1989] J. Foley, A. Van Dam, S. Feiner, J. Hughes, *Computer Graphics : principles and practice*, Addison Wesley, 1989.
- [Fox 1967] E. A. Fox, *Mechanics*. Rensselaer Polytechnic Institute. A Harper International Edition, jointly published by Harper & Row, New York, Evanston & London and John Weatherhill, Inc., Tokyo, 1967.

- [Fox 1987] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*. Dover Publications, New York, 1987.
- [Garrigues 2000a] J. Garrigues, *Mécanique des milieux continus*. 2000.
<http://esm2.imt-mrs.fr/gar/mmc.html>
- [Garrigues 2000b] J. Garrigues, *Mécanique des milieux continus en déformations finies*. 2000.
<http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gd.html>
- [Garrigues 2001] J. Garrigues, *La méthode des éléments finis*. 2001.
<http://esm2.imt-mrs.fr/gar/ef.html>
- [Germain 1986] P. Germain, *Mécanique X, Tome I*. Ecole Polytechnique, Ellipses, 1986.
- [Giaquinta 1996] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I*. Springer Berlin, 1996.
- [Gillard 1997] D. Gillard, *Vers l'animation dynamique d'un corps humain virtuel : utilisation de données biomédicales 3D*. Thèse de doctorat en informatique, Université de Reims Champagne-Ardenne, 1997.
- [Gourret 1989] J.P. Gourret, N. Magnenat Thalmann, D. Thalmann, *Simulation of object and human skin deformation in a grasping task*. SIGGRAPH'89 Conference Proceedings, 23(4) p21-30, 1989.
- [Hairer 1991] E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II Stiff and Differential Algebraic Problems*. Springer Series in Comput. Mathematics, (14), 1991, Second revised edition 1996.
- [Hairer 1993] E. Hairer, *Introduction à l'Analyse Numérique*. 1993.
<http://www.unige.ch/math/folks/hairer/polycop.html>
- [Hauth 2001] M. Hauth, O. Etmuss, *High Performance Solver for the Animation of Deformable Objects using Advanced Numerical Methods*. Computer Graphics forum, 20(3) Conference Issue p320-328, 2001.
- [Hughes 1987] T.J. Hughes, *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Enlewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [Hutchinson 1996] D. Hutchinson, M. Preston, T. Hewitt, *Adaptive refinement of mass/spring simulation*. Proceedings of the 7th Eurographics workshop on Computer Animation and Simulation, p31-35, 1996.
- [Jackson 1990] K.R. Jackson, S.P. Norsett, *The potential for Parallelism in RK methods*. Technical Report No 239/90, Computer Sciences Department, University of Toronto, 1990.
- [Kawabata 1980] S. Kawabata, *The Standardization and Analysis of Hand Evaluation*. Textile Machinery Soc. Of Japan, Osaka, 1980.
- [Kochanek 1984] D. Kochanek, R. Bartels, *Interpolating splines with local tension, continuity and bias control*. SIGGRAPH'84 Conference Proceedings, 18(3) p33-41, 1984.

- [Kutta 1901] W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen*. Zeitschr. für Math. u. Phys., (46) p435-453, 1901.
- [Lambert 1991] J.D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems : The Initial Value Problem*. John Wiley, 1991.
- [Lawson 1966] J.D. Lawson, *An order six Runge-Kutta process with extended region of stability*. SIAM J. Numer. Anal., (3) p593-597, 1966.
- [Luciani 1985] A. Luciani, *Un outil informatique de création d'images animées*. Thèse de docteur ingénieur d'électronique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1985.
- [Meißner 1998] M. Meißner, B. Eberhardt, *The Art of Knitted Fabrics, Realistic & Physically Based Modelling of Knitted Patterns*. EUROGRAPHICS'98 Proceedings, 17(3) p355-362, 1998.
- [Miller 1988] G. Miller, *The motion dynamics of snakes and worms*. SIGGRAPH'88 Conference Proceedings, 22(4) p169-177, 1988.
- [Nocent 2001a] O. Nocent, J.M. Nourrit, Y. Remion, *Towards mechanical level of detail for knitwear simulation*. WSCG'2001 Proceedings, p252-p259, 2001.
- [Nocent 2001b] O. Nocent, J.M. Nourrit, Y. Remion, *Vers du niveau de détail mécanique pour l'animation dynamique d'objets continus, Application aux textiles tricotés*. Revue internationale de CFAO et d'Informatique Graphique (16) 1 p115-130, 2001.
- [Nocent 2001c] O. Nocent, Y. Remion, *Continuous deformation energy for Dynamic Material Splines subject to finite displacements*. Proceedings of the 12th Eurographics workshop on Computer Animation and Simulation, p87-98, 2001.
- [Nourrit 1999] J.M. Nourrit, *Modélisation, animation et visualisation de textiles à base de mailles*. Thèse de doctorat en informatique, Université de Reims Champagne-Ardenne, 1999.
- [O'Brien 1999] J.F. O'Brien, J.K. Hodgins, *Graphical Modeling and Animation of Brittle Fracture*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p137-146, 1999.
- [Palazzi 1994] L.F. Palazzi, D.R. Forshey, *A Multilevel Approach to Surface Response in Dynamically Deformable Models*. Proceedings of the 5th Eurographics workshop on Computer Animation and Simulation, p21-30, 1994.
- [Pentland 1989] A. Pentland, J. Williams, *Good Vibrations : Modal Dynamics for Graphics and Animation*. SIGGRAPH'89 Conference Proceedings, 23(4) p215-222, 1989.
- [Picinbono 2001] G. Picinbono, *Modèles géométriques et physiques pour la simulation d'interventions chirurgicales*. Thèse de doctorat en Sciences de l'Ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.

- [Piegl 1991] L. Piegl, *On NURBS : a survey*. Computer Graphics and Application, 11(1) p55-71, 1991.
- [Platt 1981] S. Platt, N. Badler, *Animating facial expressions*. SIGGRAPH'81 Conference Proceedings, 15(3) p245-252, 1981.
- [Press 1988] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1988.
- [Provot 1995] X. Provot, *Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behaviour*. Graphics Interface Proceedings, p147-154, 1995.
- [Remion 2000] Y. Remion, *Animation dynamique : moteur lagrangien généraliste et applications*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2000.
- [Remion 2001] Y. Remion, J.M. Nourrit, O. Nocent, *D-dimensional parametric models for dynamic animation of deformable objects*. The Visual Computer Journal, (17) 3 p167-178, 2001.
- [Riesenfeld 1973] R. Riesenfeld, *Applications of B-spline Approximation to geometric problems of Computer Aided Design*. PhD Thesis, University of Syracuse, 1973.
- [Runge 1895] C. Runge, *Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*. Math. Ann., (46) p167-178, 1895.
- [Sederberg 1986] T. Sederberg, S. Parry, *Free-Form Deformation of Solid Geometric Models*, SIGGRAPH'86 Conference Proceedings, (20)4 p151-160, 1986.
- [Souchet 2001] R. Souchet, *Leçons sur les grandes déformations*. Cépaduès Editions, Toulouse, 2001.
- [Stroud 1974] A. H. Stroud, *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 10, Springer-Verlag, 1974.
- [Terzopoulos 1987] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, K. Fleischer, *Elastically deformable models*. SIGGRAPH'87 Conference Proceeding, 21(4) p205-214, 1987.
- [Terzopoulos 1988] D. Terzopoulos, K. Fleischer, *Modeling Inelastic Deformation : Viscoelasticity, Plasticity, Fracture*. SIGGRAPH'88 Conference Proceedings, 22(4) p269-278, 1988.
- [Terzopoulos 1989] D. Terzopoulos, J. Platt, K. Fleischer, *Heating and melting deformable models (from goop to glop)*. Graphics Interface Proceedings, p219-226, 1989.
- [Van Gelder 1998] A. Van Gelder, *Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes*. Journal of Graphic Tools, 3(2) p21-41, 1998.
- [Volino 1995] P. Volino, M. Courchesne, N. Magnenat Thalmann, *Versatile and Efficient Techniques for Simulating Cloth and Other Deformable Objects*.

- Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p137-144, 1995.
- [Volino 2000] P. Volino, N. Magnenat Thalmann, *Implementing Fast Cloth Simulation with Collision Response*. Computer Graphics International Proceedings, 2000.
- [Witkin 1990] A. Witkin, W. Welch, *Fast Animation and Control of Nonrigid Structures*. SIGGRAPH'90 Conference Proceedings, 24(4) p243-251, 1990.
- [Yngve 2000] G.D. Yngve, J.F. O'Brien, J.K. Hodgins, *Animating Explosions*. Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, p29-36, 2000.
- [Zienkiewicz 1977] O. Zienkiewicz, *The finite element method, 3rd edition*. Mac Graw Hill, London, 1977.
- [Zonneveld 1964] J.A. Zonneveld, *Automatic Numerical Integration*. Mathematical Centre Tracts, No 8, Matematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

Animation dynamique de corps déformables continus

Application à la simulation de textiles tricotés

Les progrès réalisés en animation par ordinateur ne cessent de repousser les limites de l'ensemble des formes dont on peut reproduire le mouvement. L'évolution de formes changeantes notamment est d'ores et déjà un centre d'intérêt important au sein de la communauté de l'informatique graphique. L'animation dynamique, qui repose sur les équations de la physique, consiste en une des voies envisageables pour représenter la déformation. L'avantage d'une telle approche réside dans l'adéquation du modèle avec les propriétés intrinsèques de la matière décrites par la physique. D'autre part, l'évolution de ces corps étant conditionnée par les équations du mouvement, l'animation dynamique permet d'automatiser le processus de génération d'animations.

Mais l'animation dynamique requiert la maîtrise de compétences étrangères à l'informatique telles que la mécanique et l'analyse numérique. Afin de tenter de répondre à quelques problèmes cruciaux auxquels l'informaticien doit faire face pour la réalisation d'un logiciel d'animation dynamique, la première partie de ce mémoire rassemble des études bibliographiques traitant d'une justification des équations de Lagrange, d'une classification des méthodes usuelles d'intégration numérique et d'un état de l'art des modèles déformables proposés en animation dynamique.

Nombre de modèles de corps déformables, même s'ils reposent sur des équations régissant le comportement des milieux continus, ont recours à une étape de discrétisation. Cette étape se traduit par une répartition de la masse totale du corps parmi un ensemble discret de points caractéristiques. Dans la deuxième partie de ce mémoire, je développe ma contribution à l'animation dynamique en présentant un modèle innovant de corps déformables dont la répartition massique est continue. Ce modèle, qui s'appuie sur une définition spline, englobe à la fois les courbes, les surfaces et les volumes splines. La définition géométrique de ce modèle couplée avec une description paramétrique continue de la masse permet de réaliser des simplifications formelles des équations du mouvement pour déboucher sur un système différentiel équivalent aux propriétés structurelles intéressantes. Je propose aussi une modélisation continue des efforts élastiques internes à partir d'une énergie de déformation paramétrée par les constantes caractéristiques de la matière. Ce travail s'inscrivant dans une démarche générale se limite pour le moment au cas des corps linéiques. Enfin, j'utilise le modèle des variétés splines pour mettre en œuvre une méthode de réduction de paramétrage afin d'accroître les performances de production d'animations dynamiques de textiles tricotés

Mots clés : Animation dynamique, corps déformables, simulation de textiles tricotés.

Dynamic animation of continuous deformable objects

Application to knitted cloth simulation

Recent improvements in computer animation allow simulating the motion of a large variety of shapes. As an example, deformable objects animation is becoming a major research topic for the computer graphics community. Dynamic animation is one of the possible ways to model deformation through time. First, a physics-based modelling approach gives a natural mapping between the parameters of the model and the physical properties of matter. Second, the motion considered as the solution of the underlying mechanical equations can be produced automatically with a given set of initial conditions.

But dynamic animation greatly depends on several disciplines, foreign to the computer sciences area like mechanics, numerical analysis. In order to help every developer who wants to build a dynamic animation engine, the first part of the document gathers three bibliographical studies dealing with a justification of the Lagrange equations, a classification of usual integration methods and a state of the art about physical-based modelling of deformable objects.

Many of the proposed mechanical models for deformable objects, even if they are built upon continuum mechanics, proceed in a discretizing step. This step consists of distributing the total mass upon a discrete set of characteristic points. In the second part of this document, I present an innovative model for deformable objects using a continuous mass repartition. This model, based on a spline definition, encompasses the definitions of spline curves, surfaces and volumes and allows performing formal simplifications on the equations of motion to obtain an equivalent linear differential system exhibiting remarkable structural properties. I also propose a continuous model for inner elastic constraints built upon a deformation energy function. This work, developed in a general way, is currently restricted to spline curves. Finally, I take advantage of the properties of this new mechanical model to propose a parameters reduction method in order to speed up the computation times during the process of knitwear simulation.

Keywords: Dynamic animation, deformable objects, knitted cloth simulation.